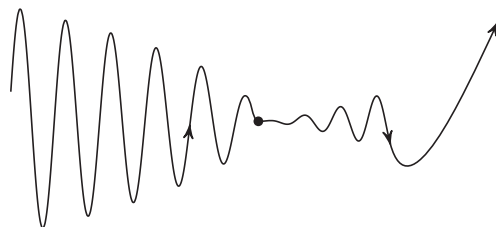
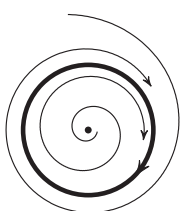
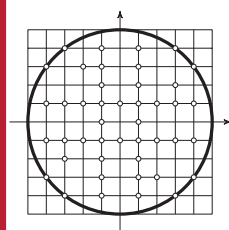
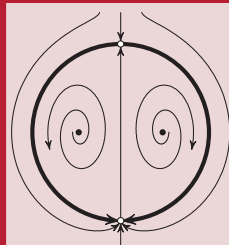
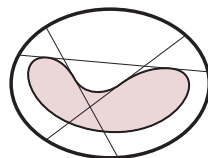


**В. И. Арнольд**

# **Экспериментальная математика**



**80 лет  
со дня рождения  
В. И. АРНОЛЬДА**

В. И. Арнольд

# Экспериментальная математика

Электронное издание

Москва  
Издательство МЦНМО  
2018

УДК 51(07)

ББК 22.1

А84

**Арнольд В. И.**

Экспериментальная математика.

Электронное издание.

М.: МЦНМО, 2018.

183 с.

ISBN 978-5-4439-3246-0

В первой части книги выдающийся математик В. И. Арнольд в полемической форме рассуждает о соотношении чистой и прикладной математики.

Вторая часть книги содержит записи курсов лекций, прочитанных автором в Дубне в 2005 году, на летней школе «Современная математика». В ней рассказывается о нескольких новых направлениях математических исследований, основанных на численных экспериментах.

Подготовлено на основе книги: *Арнольд В. И.* Экспериментальная математика. — М.: МЦНМО, 2018. — 184 с. ISBN 978-5-4439-1246-2.

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11  
тел. (499) 241-08-04  
<http://www.mcsme.ru>

ISBN 978-5-4439-3246-0

© Арнольд Э. А. (наслед.), 2018

© МЦНМО, 2018

# Оглавление

## Часть I

<b>ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА</b>	<b>5</b>
-------------------------------------	----------

## Часть II

<b>ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКТОВ</b>	<b>61</b>
---	-----------

<b>Предисловие</b> . . . . .	<b>63</b>
------------------------------	-----------

<b>Лекция 1. Статистика топологии и алгебры</b> . . . . .	<b>65</b>
---	-----------

§ 1. Шестнадцатая проблема Гильберта . . . . .	66
--	----

§ 2. Статистика гладких функций . . . . .	79
---	----

§ 3. Статистика и топология периодических функций и тригонометрических многочленов . . . . .	91
---	----

§ 4. Алгебраическая геометрия тригонометрических многочленов . . . . .	100
---	-----

<b>Лекция 2. Комбинаторная сложность и случайность</b> . . . . .	<b>109</b>
--	------------

§ 1. Геометрия бинарных последовательностей . . . . .	110
---	-----

§ 2. Графы операций взятия разностей . . . . .	113
--	-----

§ 3. Логарифмическая функция и её сложность . . . . .	118
---	-----

§ 4. Сложность и случайность таблиц полей Галуа . . . . .	122
---	-----

<b>Лекция 3. Случайные перестановки и диаграммы Юнга их циклов</b> . . . . .	<b>127</b>
--	------------

§ 1. Статистика диаграмм Юнга перестановок небольшого числа элементов . . . . .	129
--	-----

§ 2. Экспериментирование со случайными перестановками большого числа элементов . . . . .	134
---	-----

§ 3. Случайные перестановки $p^2$ элементов, порождённые полями Галуа . . . . .	137
--	-----

§ 4. Статистика циклов автоморфизмов Фибоначчи . . . . .	139
--	-----

---

<b>Лекция 4. Геометрия чисел Фробениуса</b>	
<b>для аддитивных полугрупп</b> . . . . .	<b>147</b>
§ 1. Теорема Сильвестра и числа Фробениуса . . . . .	148
§ 2. Загораживающие деревья леса . . . . .	150
§ 3. Геометрия чисел . . . . .	152
§ 4. Оценка числа Фробениуса сверху . . . . .	155
§ 5. Средние значения чисел Фробениуса . . . . .	164
§ 6. Доказательство теоремы Сильвестра . . . . .	167
§ 7. Геометрия цепных дробей чисел Фробениуса . . . . .	169
§ 8. Распределение точек аддитивной полугруппы на отрезке до числа Фробениуса . . . . .	178

Часть I

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА**

---

Но мы пощажены не будем,  
 Когда её не утаим:  
 Да, простота нужнее людям,  
 Но сложное понятней им.

*Б. Л. Пастернак*

Вопреки мнению большинства современных математиков, я, вслед за Пуанкаре, считаю математику частью физики, т. е. экспериментальной наукой. Слово «математика» означает «точное знание», и соответствующие открытия были получены из наблюдений явлений природы

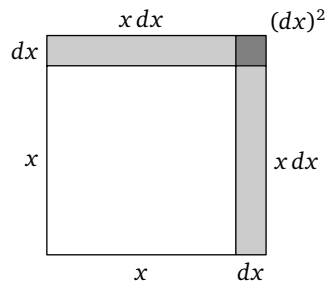
Два основных метода мышления — это индукция, выводящая общие законы из их частных проявлений, и дедукция, доставляющая частные случаи выполнения общих правил. Лейбниц говорил, что, в то время как к индукции способны животные (вроде собак Павлова), дедукция доступна только человеческим существам (подобным членам правового общества, подчиняющимся адвокатам и судьям).

Например, доказав, что дифференциал суммы равен сумме дифференциалов слагаемых, Лейбниц немедленно сформулировал общий алгебраический закон, утверждающий, что дифференцирование — гомоморфизм кольца функций. Эта его ошибка объясняет термин «формула Лейбница» для производной от произведения: он следовал в развитии алгебры дифференциального исчисления своему ошибочному правилу несколько месяцев (и далее обучал ему своего возражавшего ученика, Бернулли).

Подобная ошибка была бы совершенно невозможна для Ньютона, экспериментатора, хорошо знавшего закон Архимеда

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x \quad (\text{см. рис. 1}).$$

Экспериментальная математика сразу показывает, что площадь  $(dx)^2$  гораздо меньше, чем заштрихованная площадь  $d(x^2)$ .



**Рис. 1.** Экспериментальное опровержение Ньютоном «правила Лейбница»

Лейбниц был первым, кто совершил стандартную ошибку студентов « $d(x^2) = (dx)^2$ », обеспечив себе этим имя автора правильной формулы

$$d(uv) = u dv + (du)v.$$

Интересно, что экспериментальный факт, показанный на рис. 1, отсутствует даже в лучших учебниках анализа и геометрии. Формула

$$\partial(X \times Y) = ((\partial X) \times Y) + (X \times (\partial Y))$$

для границы прямого произведения двух многогранников или цепей — это, в сущности, то же самое «правило Лейбница» (при соответствующих ориентациях цепей).

Инфинитезимальный аналог той же самой формулы  $L = id + di$ , т. е.  $L_v = (i_v \circ d) + (d \circ i_v)$ , выражает производную Ли<sup>1</sup>  $L_v$  вдоль векторного поля  $v$  через внешнее дифференцирование  $d$  и подстановку  $i_v$  аргумента  $v$  в дифференциальную форму.

Эта «формула гомотопии» обычно доказывается в учебниках формально-дедуктивными вычислениями в координатной системе. Наивный экспериментально-физически и геометрический смысл формулы гомотопии (как и формулы для границы произведения) всегда тщательно скрывается от студентов (видимо, ради повышения авторитета преподавателей, сообщающих студентам эту могущественную формулу).

Точно так же обычное дедуктивное определение определителя матрицы делает всю теорию определителей совершенно непонятной. На самом деле определитель — это (ориентированный) объём параллелепипеда, рёбрами которого являются векторы — столбцы матрицы.

Конечно, формально-алгебраические дедукции свойств сложных многочленов, которые в учебниках алгебры называются определителями, возможны. Но настоящее понимание так не достигается: «Выучить — ещё не значит понять» — говорил Р. Том.

Перечисляя трудные определения, которыми мучают студентов, я упомяну ещё три столь же фундаментальных понятия: *группы*, *многообразия* и *алгоритмы*.

Формально-математическое определение *группы* включает две операции на этом множестве, удовлетворяющие дюжине легко забываемых аксиом.

<sup>1</sup> Производная Ли называется также производной рыбака: рыбак сидит на месте и дифференцирует по времени проносимый мимо него потоком векторного поля  $v$  тензор. Без помощи этого потока пришлось бы сравнивать приложенные в разных точках тензоры, и их разность не имела бы смысла, как разность элементов разных векторных пространств.



Понятное определение доставляется экспериментальной математикой: *группой преобразований* называется набор преобразований (взаимно однозначных отображений на себя) некоторого вспомогательно-го множества, в который вместе с каждым двумя преобразованиями входит их произведение (последовательное выполнение: символом  $ab$  обозначают выполнение сначала преобразования  $b$ , а потом преобразования  $a$ , как для действия операторов на векторы) и вместе с каждым преобразованием входит обратное преобразование.

Все аксиомы сложного дедуктивно-алгебраического определения — это просто (очевидные) свойства групп преобразований, т. е. легко доказываемые *теоремы* (экспериментально очевидные), например  $(ab)c = a(bc)$  или  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$  (поскольку если пиджак одет после одевания рубашки, то для раздевания нужно снять его до снятия рубашки).

Между группами преобразований (разных объектов) существуют иногда важные отображения, называемые *гомоморфизмами* (для которых образ произведения двух преобразований есть произведение образов этих преобразований).

Например, группа симметрий куба (их 48) действует и на его 4 большие диагонали. Это действие определяет гомоморфизм группы из 48 специальных перестановок восьми вершин куба (доставляющих симметрии куба) в группу перестановок четырёх больших диагоналей.

Таких перестановок 24, и все они доставляются сорока восемью симметриями куба (и даже 24 его вращениями) — это уже содержательный факт теории групп (и лёгкое упражнение для дошкольников).

*Абстрактной группой* называется группа преобразований, рассматриваемая с точностью до изоморфизмов (изоморфизмами называются гомоморфизмы, обратные к которым тоже являются гомоморфизмами).

Например, группа 24 вращений куба изоморфна группе 24 перестановок четырёх его больших диагоналей. Соответствующая абстрактная группа называется симметрической группой  $S(4)$ .

А. Кэли доказал несколько столетий назад, что дедуктивные алгебраические описания абстрактных групп (придуманные как обобщения наивных групп преобразований) не доставляют на самом деле *ничего нового*: все группы, удовлетворяющие аксиомам алгебраистов, изоморфны некоторым группам преобразований.

К несчастью, эта победа экспериментальной математики над аксиоматически-дедуктивной схоластикой, так затрудняющей изучение математики, не повлияла на педагогическую практику алгебраистов,

и в учебниках алгебры отсутствует приведённый выше анализ понятия абстрактной группы (зато доказывается единственность единицы и совпадение левой единицы абстрактной группы с правой единицей).

Что касается понятия многообразия, то элементарными объектами экспериментальной математики являются *подмногообразия евклидовых пространств* (например, прямые и плоскости, окружности и сферы, эллипсы и гиперболы, графики разных функций, вроде экспоненты и логарифма, синуса и тангенса).

*Гомеоморфизмы и диффеоморфизмы* между такими (топологическими или гладкими) подмногообразиями легко определяются (условиями непрерывности или дифференцируемости функций, задающих гомеоморфизмы или диффеоморфизмы в локальных координатах).

*Абстрактное топологическое (гладкое) многообразие* — это подмногообразие евклидова пространства (любой размерности), рассматриваемое с точностью до гомеоморфизма (до диффеоморфизма) подмногообразий евклидовых пространств.

Абстрактные (и трудные) определения многообразий, которые читатель может найти в учебниках, занимают много страниц. Но в теории многообразий имеется *теорема Уитни*, подобная теореме Кэли в теории групп: *попытка обобщить наивно-эксперименталистские подмногообразия евклидовых пространств не приносят ничего нового*, так как все «абстрактные многообразия» аксиомофилов гомеоморфны (в топологическом случае) или диффеоморфны (в гладком случае) некоторым наивно-экспериментальным подмногообразиям евклидовых пространств нужных размерностей.

В случае *алгоритмов* элементарным объектом является *машина Тьюринга*. Теоремы Кэли и Уитни заменены в этом случае *тезисом Чёрча*: все попытки придумать более общее определение алгоритма не дали ничего нового, всё, что способны делать (дедуктивно определяемые) «абстрактные алгоритмы», может быть сделано также и стандартной машиной Тьюринга (работающей достаточно длительное время с достаточно длинной конечной программой).

Мой вывод из всех этих примеров состоит в том, что *пора вернуться к элементарным объектам экспериментальной математики в преподавании студентам трудных теорий современной математики*.

К длинному перечню ошибок Лейбница я хотел бы добавить сейчас ещё два примера.

Изучая окружность кривизны гладкой кривой общего положения на евклидовой плоскости, Лейбниц пришёл к выводу, что она пересекает кривую (в точке касания) в *четырёх* бесконечно близких точках

(в то время как касательная прямая в обычной точке кривой пересекает её в двух бесконечно близких точках).

По-видимому, Лейбниц не пытался нарисовать эту окружность кривизны. Ньютон, например, прекрасно понимал, что парабола переходит с одной стороны «оскулирующей окружности» на другую (в общей точке параболы), вследствие чего число бесконечно близких точек пересечения оскулирующей окружности с параболой *нечётно* (на самом деле оно равно 3, а не 4, см. рис. 2).

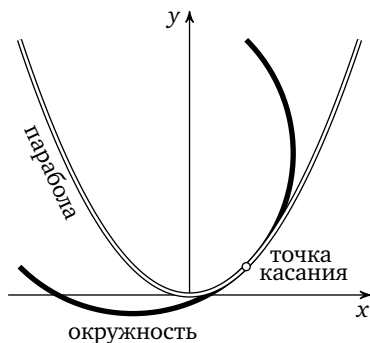


Рис. 2. Оскулирующая окружность параболической кривой

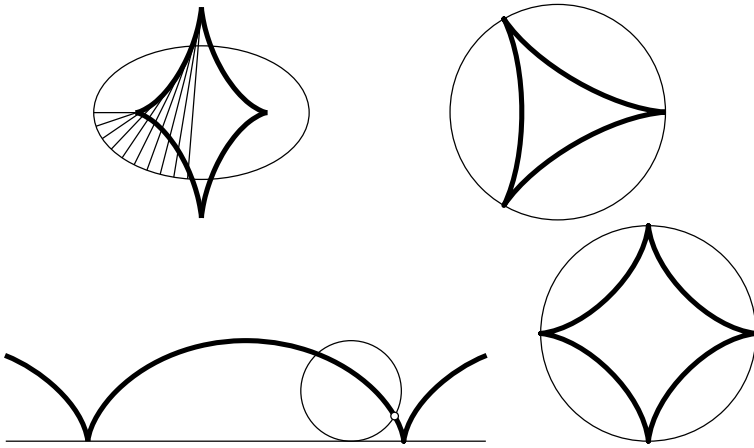
Эти экспериментальные факты были, конечно, хорошо известны и другим математикам (например, Гюйгенсу и Леонардо да Винчи), да и художникам (вызывая странные формы видимых контуров, например контуров тог, а также вызывая особенности на каустиках и на волновых фронтах, на циклоидах и на астроидах (рис. 3)).

Другая странная ошибка Лейбница опубликована недавно в его критике «Математических начал натуральной философии» Ньютона. Ньютон пытался указать «лучшую» кривую для планетной орбиты, для которой закон Кеплера о заметённой радиус-вектором площади доставлял бы более лёгкое, чем для эллиптических орбит, уравнение для определения положения планеты на орбите в каждый момент времени.

Вывод Ньютона состоял в том, что не существует такой орбиты, для которой площадь сегмента (или сектора), отсекаемого прямой, была бы алгебраической функцией от отсекающей прямой.

Лейбниц предъявил контрпример к теореме Ньютона, пометив на полях своего экземпляра *Principia* против этой теоремы: «ERROR».

На самом деле, однако, доказательство Ньютона было правильным: все контрпримеры доставлялись негладкими кривыми, а Ньютон



**Рис. 3.** Каустика (огibaющая нормалей) эллипса, гипоциклоида, циклоида и астроида

считал орбиту гладкой кривой. Его доказательство основывалось, по существу, на топологических свойствах комплексной римановой поверхности кривой, строение которой Ньютон хорошо понимал. Тот факт, что кривая, для которой площади сегментов алгебраически зависят от секущей прямой, сама должна быть алгебраической, был ясен Ньютону из «теории рядов Пюизэ», разработанной Ньютоном за сотни лет до Пюизэ в его экспериментальной математике под именем «теории параллелограмма Ньютона» (сегодня скорее называемой «теорией многогранников Ньютона»).

Эта теория Ньютона является, по сути, вариантом теории преобразования Фурье, применённой Ньютоном к многочленам, записанной Ньютоном в слегка других, чем у Фурье, обозначениях.

Доказательство Ньютона основывалось на том, что гладкая вещественная алгебраическая кривая не гомологична нулю на своей римановой поверхности (отсутствующей в негладком случае треугольника Лейбница).

Жаль, что ни теорема Ньютона, ни его «метод параллелограмма» не входят в современные курсы анализа.

Сам Ньютон считал «теорию многогранников Ньютона» (представляющую степенными рядами решения всех уравнений, алгебраических, дифференциальных или интегральных) своим основным вкладом в математику. Именно этот метод составляет содержание второй диаграммы Ньютона, закодировавшей его основные открытия.

Желая помочь читателям, от которых современные методы преподавания математики скрыли основные достижения Ньютона, я покажу сейчас, как его теория исследует поведение решений уравнения

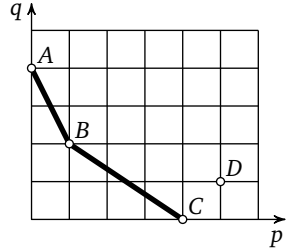
$$Ay^4 + Bxy^2 + Cx^4 + Dx^5y = 0$$

вблизи начала координат ( $x = y = 0$ ).

Алгоритм Ньютона состоит из нескольких шагов.

1. Используем «плоскость Ньютона» с координатами  $(p, q)$  для представления одночленов  $x^p y^q$  (рис. 4).

В обозначениях Фурье точка  $(p, q)$  плоскости Ньютона соответствует гармонической плоской волне  $e^{2\pi i(px+qy)}$  с «волновым вектором»  $(p, q)$ .



**Рис. 4.** Многоугольник Ньютона многочлена  $Ay^4 + Bxy^2 + Cx^4 + Dx^5y$

2. Носитель многочлена

$$f(x, y) = \sum \tilde{f}_{p,q} x^p y^q$$

есть то множество точек  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  плоскости Ньютона, для которых коэффициент  $\tilde{f}_{p,q}$  отличен от нуля.

Как видно, «преобразование Фурье»  $\tilde{f}$  функции  $f$  следовало бы называть «преобразованием Ньютона».

3. Рассмотрим *выпуклую оболочку* носителя многочлена (в плоскости  $\mathbb{R}^2 \supset \mathbb{Z}^2$ ). В примере, изображённом на рис. 4, это четырёхугольник  $ABCD$ .

4. Выделим те грани границы выпуклой оболочки, которые видны из начала координат ( $AB$  и  $BC$  в примере изображённом на рис. 4) (обращённая к бесконечности граница часто полезна для исследования кривой  $f(x, y) = 0$  не вблизи нуля, а на бесконечности).

5. Для каждой грани границы выпуклой оболочки, обращённой к началу координат, заменим многочлен  $f$  на сумму лишь тех его слагаемых-одночленов, которые соответствуют целым точкам этой грани.

В примере на рис. 4 мы получим для граней  $AB$  и  $BC$  укороченные многочлены

$$Ay^4 + Bxy^2 \quad \text{и} \quad Bxy^2 + Cx^4.$$

6. Каждый из укороченных многочленов разделим на общий делитель его одночленов. В примере, изображённом на рис. 4, получим

$$AB \mapsto Ay^2 + Bx, \quad BC \mapsto By^2 + Cx^3.$$

7. Приравнивая получившиеся многочлены нулю, мы получим асимптотические аппроксимации для ветвей кривой  $f(x, y) = 0$ , проходящих через нуль.

В примере на рис. 4 эти приближения имеют вид

$$Ay^2 + Bx = 0, \quad By^2 + Cx^3 = 0,$$

откуда получаются две ветви кривой с асимптотиками

$$x = -\frac{A}{B}y^2, \quad y = kx^{3/2}, \quad k = \sqrt{-\frac{C}{B}}.$$

8. Чтобы получить дальнейшие члены асимптотического разложения, нужно подставить в исходное уравнение исправленные малыми добавками выражения. В примере на рис. 4

$$x = -\frac{A}{B}y^2 + z, \quad y = kx^{3/2} + t.$$

Тогда для нахождения поправок  $z$  и  $t$  из условия  $f(x, y) = 0$  получатся новые полиномиальные уравнения, к которым нужно применить тот же алгоритм. Он доставит асимптотические выражения для поправок  $z(y)$  и  $t(x)$  в нашем примере, изображённом на рис. 4).

При этом  $z$  окажется малой по сравнению с  $y^2$  поправкой к исходному приближению (а  $t$  мало по сравнению с  $x^{3/2}$ ) в окрестности начала координат, и метод Ньютона доставляет сходящиеся ряды для ветвей кривой  $f(x, y) = 0$ , проходящих через начало координат (рис. 5).

Ньютон хорошо знал, сколь быстро сходятся его ряды, но не опубликовал таких очевидных для экспериментатора фактов. Он говорил, что ему стыдно сознаться, с каким числом десятичных знаков он

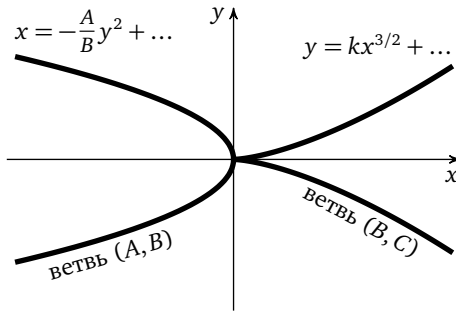


Рис. 5. Две ветви алгебраической кривой  $f(x, y) = 0$ , доставляемые двумя гранями многогранника Ньютона, изображённого на рис. 4

составил для себя сам таблицу логарифмов, «имея в деревне много времени из-за чумы 1666 г. в Лондоне». Таблицы были сороказначными. Метод вычисления этих таблиц — проявление замечательного экспериментального мастерства Ньютона. Он начал с теоретико-числовых наблюдений:

$$2^{10} = 1024 \text{ близко к } 1000, \text{ поэтому } \lg 2 \approx 0,3$$

(на самом деле это  $0,30103\dots$ ). Это наблюдение доставляет приближённые значения для  $\lg 4, \lg 8, \lg 16, \dots, \lg 128$ . Тем самым найдены и приближённые значения для  $\lg 5, \lg 25, \lg 50, \lg 125$ . Зная разложение натурального логарифма

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \dots$$

для малых  $|x|$ , Ньютон вывел из найденных приближённых значений также приближённые значения для  $\ln 10$  и  $\lg e$ . Это позволило перейти от 50 к 49 и найти  $\ln 7$ , тогда как переход от 10 к 9 доставил хорошее приближение к  $\ln 3$ . Используя произведения (например,  $63 \approx 64, 60, 72$  и т. п.), Ньютон за пару часов вычислил значения  $\ln$  и  $\lg$  для довольно плотной сети целых чисел от 1 до 100.

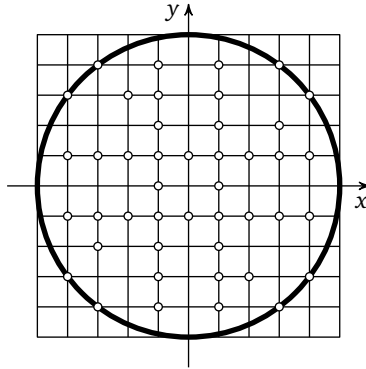
Оставшиеся логарифмы быстро вычисляются как возмущения уже найденных с малыми  $|x|$  (при помощи быстро сходящихся рядов Тейлора), так что вся таблица сороказначных логарифмов вычисляется за считанные часы.

Современное математическое образование не учит такому мастерству. Штат Калифорния ввёл несколько лет назад правило, что для приёма в университеты штата школьники должны уметь делить число 111 на 3 без компьютера. Это требование предложил Г. Сиборг, химик и нобелевский лауреат, прославленный работами по трансурановым элементам.

Наличные студенты делить 111 на 3 не могли, и вашингтонские сенаторы сочли требование антиконституционной попыткой «учить в пределах нашей родины тому, чего мы сами не понимаем». Калифорнийские требования критиковали также как «расистскую попытку преградить чёрным путь в Университет».

Умение делить 111 на 3, безусловно, входит в багаж экспериментальной математики, и я надеюсь сохранить его хотя бы в Европе.

Оставляя описанные выше древние ошибки Лейбница, обратимся к некоторым простейшим экспериментальным фактам элементарной математики: к дробям  $x/y$  ( $x$  и  $y$  целыми). Некоторые дроби сократимы, как  $4/6$ , другие — нет, как  $8/13$ .



**Рис. 6.** Пары взаимно простых чисел  $(x, y) = 1$  в замкнутом круге радиуса 5

Какова вероятность несократимости случайно выбранной дроби?

Чтобы исследовать этот естественный и естественно-научный вопрос экспериментально, рассмотрим круг  $x^2 + y^2 \leq 25$  радиуса 5.

Целая точка внутри него будет считаться сократимой, если отрезок, соединяющий её с началом координат, не содержит других целых точек (рис. 6).

Число несократимых целых точек в круге составляет 48 (из общего числа 80 ненулевых целых точек в нём). Частота несократимости в нашем круге получается равной  $\frac{48}{80} = \frac{3}{5}$ , т. е. 60 %.

Экспериментируя с большими кругами, можно убедиться, что существует предельная «вероятность несократимости»

$$C = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{\text{число взаимно простых пар } (x, y) = 1}{\text{число ненулевых целых точек в круге } x^2 + y^2 \leq R^2} \right) \approx 0,608 \dots$$

Вычисляя эту экспериментально обнаруженную постоянную, Эйлер нашёл её точное значение:  $C = 6/\pi^2$ .

Эта экспериментальная работа привела его к целому ряду замечательных математических открытий — к теории дзета-функций

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \quad (1)$$

к теории рядов Фурье (для негладких периодических функций) и к теории градуированных алгебр и их рядов Пуанкаре.

Суммирование в формуле (1) идёт по всем натуральным числам,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ , а умножение — по всем простым числам,  $p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$



Постоянная  $C = 6/\pi^2$  есть  $1/\zeta(2)$ :

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \approx 1,645 \dots,$$

что сильно больше первого приближения 1,25.

Ряд (1) сходится при  $\operatorname{Re} s > 1$ , определяя там голоморфную в полуплоскости функцию. Эта функция продолжается на вторую полуплоскость мероморфно.

Чтобы объяснить тождество Эйлера (1) между суммой и произведением, начнём с (полуэмпирического) вероятностного рассуждения экспериментально-математического происхождения.

Это рассуждение можно строго обосновать и превратить в настоящее доказательство, но умение находить новые факты подобными нестрогими полуэмпирическими методами важнее последующих доказательств (которые могут появиться через сотни лет, как это произошло с экспериментальным открытием Лежандра, что среднее расстояние между соседними простыми числами в среднем ведёт себя для простых чисел вблизи большого числа  $n$  асимптотически как  $\ln n$ ).

Доказательство этого факта (обнаруженного Лежандром экспериментально при  $n \leq 10^6$ ) обычно приписывается Адамару и Валле-Пуссену. В действительности, однако, они доказали только существование асимптотики, обнаруженной экспериментально Лежандром. До них П. Л. Чебышев доказал, что эмпирическая асимптотика Лежандра «расстояние  $\sim \ln n$ » может быть пополнена доказанными неравенствами

$$a \ln n < \text{расстояние} < b \ln n$$

и что если асимптотика «расстояние  $\sim c \ln n$ » существует, то постоянная  $c$  должна быть равна 1 (хотя Лежандр получил эмпирическое приближение  $c \approx 0,99997 \dots$ ).

Адамар и Валле-Пуссен ничего не добавили к этим замечательным открытиям Лежандра и Чебышева, кроме только строгого доказательства существования асимптотики, открытой до этого Лежандром и вычисленной до этого Чебышевым.

Вероятность делимости  $x$  на 2 есть  $1/2$ , делимости  $y$  на 2 — тоже  $1/2$ . Эти два события независимы, поэтому вероятность делимости целочисленного вектора  $(x, y)$  на 2 равна  $1/4$ .

Точно так же вероятность делимости на простое число  $p$  равна  $1/p^2$ . Поэтому неделимость целочисленного вектора плоскости на  $p$  есть событие вероятности  $1 - 1/p^2$ .

Неделимости на разные простые числа независимы. Поэтому одновременная неделимость ни на одно из простых чисел имеет вероятность

$$C = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Таким образом, мы естественным путём пришли к произведению, стоящему в формуле Эйлера (1), для  $s = 2$ . Аналогичные произведения для других целых значений  $s$  получаются при анализе делимости на  $p$  целочисленных векторов  $s$ -мерного пространства, принадлежащих  $\mathbb{Z}^s$ .

Приведение входящего в формулу (1) произведения к виду входящей в формулу (1) суммы доставляется эйлеровой теорией градуированных коммутативных алгебр (которая вычисляет число одночленов степени  $m$  от  $s$  переменных).

Обозначим это число через  $q_m$  и построим производящую функцию

$$q(t) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m t^m$$

(она называется *рядом Пуанкаре* градуированной алгебры многочленов от  $s$  переменных).

Для  $s = 1$  мы получаем, очевидно,  $q_m = 1$  при любом  $m \geq 0$ . Поэтому ряд Пуанкаре градуированной алгебры многочленов от одной переменной равен

$$q(t) = 1 + t + t^2 + \dots = \frac{1}{1-t}.$$

Рассмотрим многочлены от двух переменных. Перемножая соответствующие ряды

$$q(t) = 1 + t + t^2 + \dots, \quad q(\tilde{t}) = 1 + \tilde{t} + \tilde{t}^2 + \dots,$$

мы замечаем, что произведение

$$q(t)q(\tilde{t}) = (1 + t + t^2 + \dots)(1 + \tilde{t} + \tilde{t}^2 + \dots) = 1 + (t + \tilde{t}) + (t^2 + t\tilde{t} + \tilde{t}^2) + \dots$$

содержит ровно один раз каждый многочлен от двух переменных  $t$  и  $\tilde{t}$ .

Стало быть, производящая функция, считающая одночлены от двух переменных, есть

$$q(t)q(\tilde{t}) = 1 + 2t + 3t^2 + \dots = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Такое же рассуждение доставляет ряд Пуанкаре

$$Q(t) = \frac{1}{(1-t)^m}$$

для многочленов от  $m$  переменных.

Применяя эти разложения к произведению

$$\frac{1}{C} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \prod_p \left( 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \right),$$

мы получим ряд, элементами которого являются конечные произведения степеней различных простых чисел

$$\frac{1}{2^{m_2 s}} \cdot \frac{1}{3^{m_3 s}} \cdot \frac{1}{5^{m_5 s}} \cdot \dots = \frac{1}{n^s},$$

где  $n = 2^{m_2} \cdot 3^{m_3} \cdot 5^{m_5} \cdot \dots$ .

Эти произведения  $n$  доставляют по разу в точности все натуральные числа (это теорема единственности разложения на простые множители).

Так Эйлер доказал свою формулу (1) для дзета-функции Римана (изобретённой Эйлером именно в его эксперименталистском исследовании вероятности сократимости дробей).

Вычисление суммы ряда

$$\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

является лёгким упражнением по вычислению коэффициентов Фурье (негладких)  $2\pi$ -периодических функций Колмогорова

$$f_0(t) = \text{sign} \sin t, \quad f_r(t) = \int_t f_{r-1}(t) dt.$$

Постоянная интегрирования в интеграле для  $f_r$  выбирается так, чтобы интеграл от  $f_r$  по всему периоду был нулём, дабы функция  $f_{r+1}$  была периодической.

Полученная формула Эйлера:

$$\text{вероятность сократимости дроби есть } C = \frac{6}{\pi^2}$$

может быть также истолкована как вычисление чезаровского среднего функции Эйлера  $\varphi$ , определённой так:

$$\varphi(n) = \text{число взаимно простых с } n \text{ остатков от деления на } n.$$

Легко видеть, что для простого  $p$  имеют место равенства

$$\varphi(p) = p - 1, \quad \varphi(p^q) = (p - 1)p^{q-1},$$

а для взаимно простых  $n_1$  и  $n_2$  функция Эйлера ведёт себя мультипликативно:

$$\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1) \varphi(n_2).$$

Значения функции Эйлера  $\varphi(n)$  ведут себя при росте числа  $n$  нерегулярно:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Однако их чезаровское асимптотическое среднее ведёт себя как  $Cn$ , где

$$C = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2} \approx 0,608 \dots$$

Этот вывод следует из предыдущего полуэмпирического вывода вероятности несократимости дроби (который допускает вполне строгое обоснование).

Асимптотический чезаровский коэффициент  $C$  определяется здесь как

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n^2} \sum_{m \leq n} \varphi(m) \right),$$

причём для  $n = 20$  получается

$$\frac{2}{n^2} \sum = \frac{258}{400} = 0,645.$$

*Замечание.* Чезаровская асимптотика числа  $\tau(n)$  целых делителей большого целого числа  $n$  есть

$$\hat{\tau}(n) \sim \ln n,$$

а чезаровская асимптотика суммы  $\sigma_s$   $s$ -х степеней делителей есть

$$\hat{\sigma}(n) \sim c_s n^s, \quad \text{где } c_s = \zeta(s + 1).$$

Здесь чезаровская асимптотика  $\hat{u}(n)$  величины  $u(n)$  определяется условием

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n u(m)}{\sum_{m=1}^n \hat{u}(m)} = 1. \tag{*}$$

Это чезаровское среднее не нужно путать с противоположным определением, принимаемым многими математиками, для которых постоянная  $C$  в их средней «асимптотике», обозначаемой знаком « $\sim$ »,  $u(n) \sim Cn^a$ , определяется формулой

$$C = \frac{1}{n^{a+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{m=1}^n u(m) \right).$$

Дело в том, что в их (противоположном) смысле чезаровское среднее от  $sn^a$  равно (« $\sim$ »)  $\frac{c}{a+1} n^a$ , так что их коэффициент  $C = \frac{c}{a+1}$  в  $a + 1$  раз меньше естественного коэффициента  $c$ .

В противополоственном определении «среднее» от  $n$  есть  $n/2$ . В моём определении (\*) среднее от  $n$  есть  $n$ .

Это техническое замечание становится важным в экспериментальной работе, если  $a \neq 0$ , так как без него трудно сравнивать (противополоственные) средние с наблюдениями.

**Пример.** Для суммы делителей  $\sigma(n) = 1 + \dots + n$  наблюдаемое значение

$$\sum_{m=1}^{20} \sigma(m) = 309$$

хорошо соответствует моему чезаровскому среднему (\*):

$$\hat{\sigma}(n) \approx c_1 n^1 \quad \left( c_1 = \frac{\pi^2}{6} \right).$$

Противополоственное определение даёт противополоственное «чезаровское среднее»  $Cn$ , где

$$C \approx \frac{309}{400} \approx 0,77,$$

что примерно вдвое меньше наблюдаемого  $c_1$ .

Зная поведение суммы делителей  $\sigma_1(n)$  числа  $n$  и число делителей  $\tau(n)$ , можно исследовать и поведение среднего делителя,

$$d(n) = \frac{\sigma_1(n)}{\tau(n)}.$$

Эксперименты показали, что чезаровское среднее  $\hat{d}$  среднего делителя сильно превосходит отношение чезаровских средних числителя и знаменателя:

$$\hat{d}(n) \sim \frac{cn}{\sqrt{\ln n}} \gg \frac{cn}{\ln n}.$$

К сожалению, специалисты по теории чисел, кажется, пренебрегли всеми этими естественными естественно-научными вопросами (предпочитая им проблемы дедуктивно-аксиоматического происхождения, вроде гипотезы Римана, что  $\text{Re } s = 1/2$  во всех нетривиальных нулях  $s$  функции  $\zeta$ ).

Пуанкаре утверждал, что математические проблемы делятся на два типа: *бинарные проблемы* (вроде проблемы Ферма или гипотезы Римана), где ожидается бинарный ответ («да» или «нет»), и *интересные проблемы*, где возможно непрерывное продвижение вперёд, основанное на новых экспериментальных данных, и где можно исследовать влияние деформирования условий задачи (вроде граничных

условий для дифференциального уравнения) на природу решения (как в задачах о бифуркациях).

К счастью, бинарные проблемы (будь то проблемы из списка Гильберта или из других списков) оказали столь же мало влияния на развитие науки, как и Нобелевские премии или Филдсовские медали. Ни Г. Вейль, ни М. Морс, ни Лере, ни Колмогоров, ни Черн, ни Понтрягин, ни Тьюринг, ни Шэннон, ни Петровский, ни Гёдель не были отмечены Комитетом по медалям Филдса, но их работы составляют главные достижения математики XX столетия.

Пуанкаре сформулировал в качестве основной задачи, унаследованной двадцатым веком от предыдущего, *проблему создания математических методов квантовой и релятивистской физики* (его доклад Всемирному математическому конгрессу об этом был опубликован за 3 года до проблем Гильберта, а его принцип относительности — за 10 лет до Эйнштейна).

Скажу здесь несколько слов об упомянутой Пуанкаре *теории бифуркаций*, объясняющей *потерю устойчивости положений равновесия (типичных) динамических систем*.

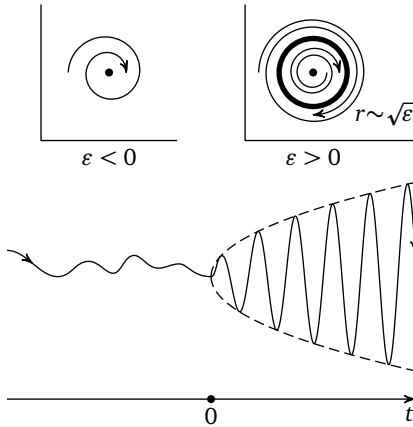
Стандартное исследование устойчивости начинается с вычисления собственных чисел линеаризованного в положении равновесия векторного поля, определяющего динамику малых отклонений от положения равновесия. Для устойчивости эти собственные числа должны принадлежать левой полуплоскости,  $\text{Re } \lambda < 0$ .

Деформация системы, происходящая при изменении значений некоторых её параметров (как на Чернобыльской станции), может сдвинуть собственные числа из левой полуплоскости в правую. В момент, когда собственное число (вместе с сопряжённым ему собственным числом) переходит в правую полуплоскость, положение равновесия теряет устойчивость.

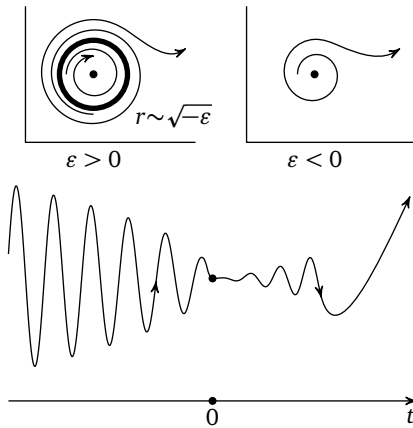
При этом (в типичных системах) произойдёт одно из следующих двух событий (они называются *мягкой* потерей устойчивости и *жёсткой* потерей устойчивости).

В момент мягкой потери устойчивости потерянная устойчивость положения равновесия переходит вновь родившемуся из него предельному циклу-аттрактору, который растёт как квадратный корень из времени, прошедшего после потери устойчивости (рис. 7).

Родившийся предельный цикл вначале мал, и, несмотря на его уже потерянную устойчивость, наблюдатель вначале может думать, что равновесие ещё устойчиво, так как возникшие осцилляции вблизи этого положения равновесия имеют малую ( $\varepsilon$ ) амплитуду.



**Рис. 7.** Рождение предельного цикла и поведение фазовой координаты вблизи момента мягкой потери устойчивости равновесия



**Рис. 8.** Умирание области притяжения положения равновесия при жёсткой потере устойчивости и результирующий катастрофический уход системы в другую часть фазового пространства

При жёсткой потере устойчивости наблюдается совершенно иной сценарий: в момент потери устойчивости в положении равновесия умирает неустойчивый предельный цикл (рис. 8). В двумерном случае исчезает область притяжения положения равновесия, ограниченная этим циклом (в многомерном случае она ограничена цилиндрической гиперповерхностью, направляющей которой является этот цикл).

В момент жёсткой потери устойчивости дальнейшее движение системы в малой окрестности утратившего устойчивость равновесия долго продолжаться не может: наблюдатель внезапно заметит катастрофический уход системы в другую область фазового пространства, хотя перед моментом потери устойчивости наблюдались такие же затухающие колебания вблизи положения равновесия, как и при мягкой потере устойчивости.

Отсюда видно, что различие мягкой и жёсткой потери устойчивости жизненно важно для практической безопасности работы системы.

Какой из этих двух сценариев реализуется, зависит от знака некоторой комбинации коэффициентов Тейлора невысокого порядка в разложении векторного поля, задающего динамику системы, в положении равновесия.

Описанная выше теория была опубликована в конце двадцатых годов XX столетия русским радиофизиком А. А. Андроновым, разработавшим её ради исследования мощных радиопередающих устройств (где как раз используется вновь родившийся устойчивый предельный цикл, изображённый на рис. 7). Математические доказательства его утверждений непросты, и они были опубликованы лишь несколько лет спустя, так что его теория, относящаяся вначале к экспериментальной, полуэмпирической математике, стала строго обоснованной математической теоремой в конце тридцатых годов.

Сегодня эту теорию называют (даже, как это ни странно, в России) «теорией бифуркации Хопфа», по имени американского математика Э. Хопфа, опубликовавшего в США через 15 лет после Андропова часть его результатов.

Теория Андропова, однако, основывалась на предшествовавших ей и использованных им результатах Пуанкаре, создавшего общую теорию бифуркаций ради небесно-механических приложений к теории бифуркаций периодических орбит в задаче трёх тел.

Но Пуанкаре сформулировал (особенно в своей диссертации, а позже и в своей книге «Новые методы небесной механики») и общую теорию.

Интересно, что эта прикладная работа Пуанкаре в области экспериментальной математики уже содержала важный общетеоретический результат, который называется сегодня «теорией версальных деформаций» (в диссертации Пуанкаре эта теория составляла лемму 4).

Знаменитая теорема о версальных деформациях сводит исследование произвольных деформаций заданной системы к исследованию одной специальной (многопараметрической) деформации, называе-



мой «версальной деформацией», которая в некотором смысле «содержит» все остальные деформации.

В современных терминах можно сказать, что Пуанкаре доказал эту теорему для точек полного пересечения голоморфных гиперповерхностей. Это требование аналитичности правых частей дифференциальных уравнений (позволяющее использовать комплексную геометрию в доказательствах) выполнялось в небесной механике, но сильно ограничивает приложения к неаналитическим системам общего положения.

Соответствующая теорема для топологических бифуркаций динамических систем, не предполагающая даже дифференцируемости нужных функций по параметрам, была опубликована Р. Томом (таких как «приложение топологии в биологии») для четырёхпараметрических систем.

Однако его (неопубликованное) доказательство было неверным, и сегодня неизвестно, существует ли в его ситуации четырёх параметров версальная деформация (известно только, что предложенная им деформация не версальна).

Том пропустил ряд случаев, думая, что в динамических системах общего положения с четырьмя параметрами встречаются лишь семь специальных бифуркаций, рассмотренных в его «теории катастроф» (эти 7 катастроф Тома, вероятно, первым рассмотрел сотней лет раньше А. Кэли, но он не утверждал, что этими примерами всё исчерпывается).

Сегодня известно, что разных бифуркаций положений равновесия градиентных динамических систем Тома (с четырьмя параметрами) не меньше тринадцати, однако не доказано ни отсутствие ещё других бифуркаций, ни хотя бы конечность числа топологически разных бифуркаций в четырёхпараметрических системах общего положения.

Для случая одного и двух параметров классификация Тома правильная, но при большем числе параметров возникают пропущенные им новые явления (называемые сегодня «бифуркациями инстантонов»).

В отличие от топологического ( $C^0$ ) случая непрерывных бифуркаций, случай неаналитической гладкой ( $C^\infty$ , а иногда и  $C^r$ ) классификации деформаций решён в современной математике аналогичной теории Пуанкаре теоремой о версальных деформациях, открытой Р. Томом и доказанной Б. Мальгранжем.

Мальгранж несколько лет сопротивлялся Тому, который старался убедить его, что гладкая теорема о версальных деформациях должна быть верной и что гладкие функции ведут себя в этом случае подобно аналитическим.

В отличие от Пуанкаре, ограничивавшегося аналитическим случаем, Андронову были нужны и гладкие системы. Теоремы Мальгранжа

тогда ещё не было, но нужное Андронову перенесение результатов Пуанкаре на неаналитические системы построил уже в тридцатые годы Л. С. Понтрягин. Так в этом случае вопрос экспериментальной математики привёл чистых математиков (как Пуанкаре и Понтрягин) к красивым «дедуктивным» теориям.

Не входя в детали этих теорий, я упомяну, однако, один случай, где эти теории ещё недостаточны для решения важного вопроса (связанного с 16-й проблемой Гильберта о предельных циклах).

Рассмотрим «интегрируемую систему» дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

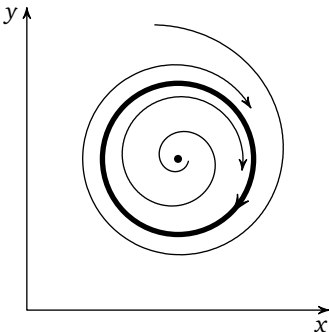
все фазовые кривые которой на плоскости с координатами  $(x, y)$  замкнуты. Обозначим через  $H$  соответствующий первый интеграл (замкнутые компоненты связности линий уровня кривой  $H(x, y) = 0$  являются орбитами движения в исходной интегрируемой системе:

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0.$$

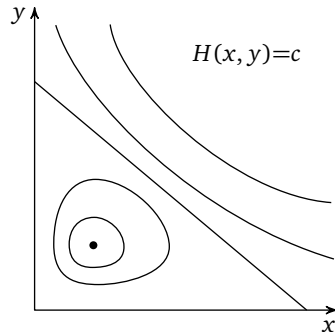
Типичный пример доставляют системы типа уравнений «борьбы за существование» Лотки — Вольтерры

$$P = x(a + bx + cy), \quad Q = y(d + ex + fy).$$

При некоторых наборах коэффициентов  $(a, \dots, f)$  эта система интегрируема (рис. 9) и имеет первый интеграл  $H$  (рис. 10). Например, это так в случае  $b = f = 0$ .



**Рис. 9.** Фазовые кривые неинтегрируемой системы типа Лотки — Вольтерры



**Рис. 10.** Линии уровня нормализованного первого интеграла  $H$  интегрируемой системы типа Лотки — Вольтерры

Первый интеграл общей интегрируемой системы типа Лотки — Вольтерры приводится (линейной заменой координат на фазовой плоскости) к (вообще говоря, трансцендентной) «нормальной форме»

$$H(x, y) = x^\alpha y^\beta z^\gamma, \quad \text{где } z = 1 - x - y.$$

Теория Пуанкаре и Понтрягина описывает рождение предельных циклов из замкнутых фазовых кривых  $H = c$  интегрируемой системы при её малых возмущениях, заменяющих векторное поле с компонентами  $(P, Q)$  на поле с компонентами  $(P + \varepsilon p, Q + \varepsilon q)$ , где  $p$  и  $q$  — некоторые «возмущающие функции» от  $x$  и  $y$ .

Пуанкаре предложил проинтегрировать скорость возрастания интеграла  $H$  в возмущённом движении вдоль фазовых кривых невозмущённого движения,

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^T \left( \frac{\partial H}{\partial x} (P + \varepsilon p) + \frac{\partial H}{\partial y} (Q + \varepsilon q) \right) dt = \\ &= \varepsilon \oint_{H=c} \left( p \frac{\partial H}{\partial x} + q \frac{\partial H}{\partial y} \right) dt = \varepsilon \oint_{H=c} \left( p \frac{\partial H}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{P} dx + \left( q \frac{\partial H}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{Q} dy. \end{aligned}$$

Обозначая через  $I(c)$  последний интеграл вдоль компоненты связности замкнутой линии уровня кривой  $H(x, y) = c$ , Пуанкаре и Понтрягин доказали рождение предельных циклов из тех линий уровня  $H(x, y) = c$ , для которых интеграл  $I(c)$  обращается в нуль, так что число рождающихся предельных циклов равно числу нулей функции  $I$  (в частности, если все эти нули простые, но и в некоторых более общих случаях).

Вопрос 16-й проблемы Гильберта о предельных циклах состоит в том, каково наибольшее возможное число предельных циклов для квадратичного векторного поля на плоскости (т. е. когда  $P$  и  $Q$  — многочлены второй степени).

До сих пор неизвестно, ограничено ли это число циклов единой постоянной для всех квадратичных полей. Доказана лишь конечность числа предельных циклов для каждого индивидуального квадратичного поля, но это конечное число может сильно зависеть от коэффициентов многочленов  $P$  и  $Q$ , так что неясно, ограничено ли оно равномерно (единой для всех значений коэффициентов постоянной).

Вследствие этого, используя теорию бифуркаций Пуанкаре — Понтрягина в ситуации проблемы Гильберта, хотелось бы найти число изолированных нулей  $c$  специального интеграла  $I$ , определённого выше для систем типа Лотки — Вольтерры: хотелось бы узнать, ограничено

ли это число нулей равномерно (не зависящей от коэффициентов квадратичных многочленов  $P, p, Q$  и  $q$  постоянной).

Этот вопрос относится, в сущности, к алгебраической геометрии. Но алгебраические геометры не справляются с действительными ( $\mathbb{R}$ ) трудностями, будучи скорее заинтересованными комплексными или  $p$ -адическими проблемами.

С другой стороны, вопросы о числе циклов или о числе нулей интеграла  $I$  можно считать проблемами вычислительной математики (так как компьютерные эксперименты могли бы, в принципе, доставить новые примеры, где циклов больше, чем удалось найти теоретикам).

К несчастью, вклад компьютеров в эти действительные ( $\mathbb{R}$ ) и трудные проблемы экспериментальной математики пока что ещё мал. Я могу указать только один недавний пример — задачу подсчёта параболических кривых на поверхностях трёхмерного евклидова пространства, которые являются графиками многочленов  $z = f(x, y)$  степени 4.

Параболическая кривая графика определяется условием вырожденности второго дифференциала функции,  $H(x, y) = 0$ , где

$$H = \det \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

Гессиан  $H$  многочлена  $f$  четвёртой степени сам является многочленом степени 4. Число замкнутых кривых уровня многочлена степени 4 не превосходит  $g + 1 = 4$  по общей теореме Харнака вещественной алгебраической геометрии. Теорема Харнака эквивалентна случаю  $n = 1$  следующего неравенства Смита для чисел Бетти с коэффициентами  $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ : если  $M_{\mathbb{C}}$  — комплексное алгебраическое проективное многообразие размерности  $n$  и  $M_{\mathbb{R}}$  — многообразие его вещественных точек, то неравенство Смита имеет вид

$$\sum_{i=0}^n b_i(M_{\mathbb{R}}) \leq \sum_{j=0}^{2n} b_j(M_{\mathbb{C}}).$$

При  $n = 1$  каждая замкнутая вещественная кривая  $M_{\mathbb{R}}$  даёт в левую часть вклад

$$b_0(S^1) + b_1(S^1) = 2,$$

а риманова поверхность  $M_{\mathbb{C}}$  рода  $g$  даёт в правую часть вклад

$$b_0(M_{\mathbb{C}}) + b_1(M_{\mathbb{C}}) + b_2(M_{\mathbb{C}}) = 1 + 2g + 1,$$

поэтому неравенство Смита принимает следующий вид:

$$\text{число замкнутых компонент вещественной кривой } M_{\mathbb{R}} \leq g + 1.$$

Род гладкой плоской проективной кривой степени  $n = 4$  равен

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 3$$

(по формуле Римана — Гурвица), так что число замкнутых ветвей параболической кривой  $H = 0$  графика многочлена  $f$  степени 4 не может превзойти  $g + 1 = 4$ .

Построить примеры многочленов  $f$  степени 4 с тремя замкнутыми параболическими кривыми  $M_{\mathbb{R}}$  на графике нетрудно. Но вопрос о том, достигается ли случай  $b_1(M_{\mathbb{R}}) = 4$ , оставался открытым много лет. Для многочленов  $f$  степени  $n$  верхняя и нижняя грани для числа замкнутых параболических кривых  $H = 0$  на графике многочлена  $f$  растут с ростом  $n$  как  $n^2$ , но коэффициенты при  $n^2$  в оценке Харнака (сверху) и в примерах (доставляющих оценку снизу) пока ещё сильно различаются.

Сходная ситуация имеет место и для числа замкнутых параболических кривых на гладкой алгебраической поверхности степени  $n$  в  $\mathbb{R}P^3$ : здесь и оценка сверху, и число кривых в построенных примерах растут как  $n^3$ , но коэффициент при  $n^3$  в оценке сверху примерно в 10 раз больше, чем в наилучших примерах.

В 2005 г. были впервые построены действительные многочлены степени 4 от двух переменных, на графиках каждого из которых имеются 4 замкнутые параболические кривые.

Эти примеры построила в Мексике выпускница университета Париж-6 Адриана Ортиц Родригес, недавно защитившая в Париже диссертацию о параболических кривых.

Она использовала непрерывно работавший в течение года компьютер, исследовавший за это время пятьдесят миллионов многочленов четвёртой степени  $f$ . У трёх из этих многочленов оказалось по четыре замкнутые параболические кривые.

По-видимому, пока ещё неизвестно, из скольких компонент связности состоит множество действительных многочленов  $f$  степени 4 от двух переменных, для которых на графике лежат четыре замкнутые параболические кривые  $M_{\mathbb{R}} : H(x, y) = 0$ , так что  $b_1(M_{\mathbb{R}}) = 4$ .

Неизвестно также, различаются ли топологически соответствующие гессианы (многочлены  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ).

Аналогичные вопросы о компонентах пространства многочленов открыты и для общих многочленов степени четыре  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (не являющихся гессианами). Такая функция в  $\mathbb{R}^2$  имеет, вообще говоря, не более девяти критических точек. Число топологически различных

деревьев для функций Морса с десятью критическими точками на сфере  $S^2$  равно 17 746.

Дерево функции — это пространство, точками которого являются связные компоненты множеств уровня этой функции. Например, деревом горы Эльбрус, имеющей две вершины, разделённые седлом, является буква У. Мы будем предполагать все критические точки невырожденными (морсовскими) и все критические значения различными.

Гора Везувий тоже доставляет три критические точки: максимум, минимум (в кратере) и седло (в низшей точке края кратера). Соответствующее дерево тоже гомеоморфно букве У, как для Эльбруса, но мы будем считать эти два дерева топологически разными, требуя для топологической одинаковости, чтобы порядок критических значений (на оси значений функции) в соответствующих друг другу критических точках двух функций (т. е. в концевых точках и в точках ветвления их деревьев) был одинаковым.

Из 17 746 деревьев с четырьмя точками ветвления (соответствующих различным упорядочениям десяти вершин дерева) многочленами степени 4 реализуются лишь немногие. Вопрос о том, какие именно деревья (с упорядоченными вершинами) реализуются многочленами степени  $n$ , был бы интересным добавлением к 16-й проблеме Гильберта о топологии вещественных алгебраических кривых.

Эта проблема Гильберта была решена древними для кривых степеней 1 и 2, а для кривых степеней 3 и 4 — Ньютоном и Декартом. Гильберт объявил, что он доказал некоторую теорему о топологической структуре расположения одиннадцати овалов кривой степени 6, а именно, что возможны только два топологически различных расположения овалов на вещественной проективной плоскости.

Однако эти теоремы Гильберта были неверными, так же как и их (не опубликованные им) доказательства.

Проблема экспериментальной математики — как может выглядеть плоская вещественная алгебраическая кривая данной степени  $n$  — является одним из самых фундаментальных вызовов, бросаемых математике естественными науками (где эти кривые описывают самые разнообразные явления природы).

Ответ на этот естественно-научный вопрос неизвестен и сегодня уже для кривых степени 8 (а именно, неизвестно, как могут располагаться их 22 овала).

Экспериментальные исследования этого направления были начаты российским математиком Д. А. Гудковым, учеником А. А. Андро-

нова, который исправил неверный ответ Гильберта, описывающий расположение 11 овалов кривых степени 6.

Число топологически различных расположений этих одиннадцати овалов равно не двум, как утверждал Гильберт, а трём. А именно, ровно один овал содержит другие овалы в ограниченной им диффеоморфной кругу области, причём число этих внутренних овалов может быть 1, 5 или 9 (рис. 11).

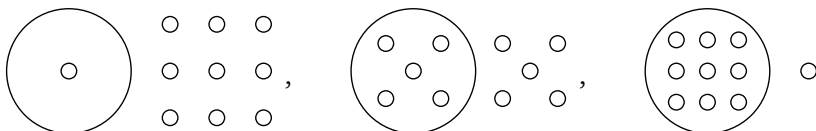


Рис. 11. Алгебраические кривые степени 6, состоящие из 11 овалов

Рецензируя диссертацию Гудкова (которая опровергала не только теорему Гильберта, но и доказательство этой теоремы, опубликованное в предыдущей работе Гудкова), я связал его результаты с топологией четырёхмерных гладких многообразий (где известные теоремы о делимости топологических инвариантов на 8 объясняют шаг 4 последовательности 1, 5, 9 ответов Гудкова).

Сегодня вещественная алгебраическая геометрия, возникшая из работ о вопросе 16-й проблемы Гильберта о топологии вещественных проективных кривых, достигла огромных успехов, связавших эту область исследований с топологией многомерных многообразий, с инвариантами квантовой теории поля и даже с арифметикой (целочисленных квадратичных форм).

Однако основные экспериментально-математические проблемы, включая естественные естественно-научные вопросы о вещественных многочленах (или тригонометрических многочленах) или о возможных числах Бетти алгебраических поверхностей фиксированной степени, остаются открытыми.

Интересно отметить, что эти вопросы вещественной алгебраической геометрии связаны с топологическими свойствами собственных функций и полей задач математической физики.

Алгебраический случай включается в эту теорию, где он соответствует колебаниям стандартной сферы, описываемым собственными функциями оператора Лапласа на ней (ведь эти собственные функции являются многочленами, а именно ограничениями на сферу гармонических в объемлющем пространстве многочленов).

Первая попытка распространить топологические свойства алгебраических объектов на трансцендентный случай принадлежит Куранту, теорема которого оценивает число областей, на которые гиперповерхность нулей собственной функции делит колеблющееся многообразие: это число компонент связности дополнения к гиперповерхности нулей не превосходит номера собственной функции (в естественном упорядочении по убыванию собственных чисел).

В книге «Методы математической физики» Куранта и Гильберта такая же оценка числа компонент числом  $n$  указана и для линейной комбинации первых  $n$  собственных функций. Но эта теорема неверна, если размерность колеблющегося многообразия больше единицы.

Задача трансцендентного обобщения теоремы Безу и теории Штурма, оценивающего числа Бетти множеств уровня собственных функций и зависимость топологии собственных функций или собственных полей от положения соответствующего собственного числа в спектре оператора, — всеми этими естественно-научными задачами теории-математики пренебрегли (причём это относится и к алгебраическим геометрам, и к специалистам по уравнениям с частными производными, к дифференциальным топологам и к специалистам по теории узлов, к исследователям спиральности магнитного поля и обобщений инварианта Хопфа).

Я не сомневаюсь, что новое понимание всей этой интереснейшей области придёт скорее со стороны экспериментальной математики, чем со стороны аксиоматических дедукций (новое понимание может ведь произойти и от контрпримеров к существующим гипотезам, и от новых нестрогих доводов, поддерживающих их).

Следующий пример приложения экспериментов к теоретическим исследованиям принадлежит А. Н. Колмогорову.

Чтобы оценить число предельных циклов квадратичных векторных полей на плоскости, он раздал несколько сотен таких полей (со случайно выбранными коэффициентами многочленов второй степени) нескольким сотням студентов механико-математического факультета МГУ в качестве математического практикума.

Каждый студент должен был найти число предельных циклов своего поля.

Результат этого эксперимента был совершенно неожиданным: ни у одного поля не оказалось ни одного предельного цикла!

При малом изменении коэффициентов поля предельный цикл сохраняется. Поэтому системы с одним, двумя, тремя (и даже, как стало известно позже, четырьмя) предельными циклами образуют в про-



странстве коэффициентов открытые множества, так что вероятности попасть в них при случайном выборе коэффициентов многочленов положительны.

Тот факт, что этого не случилось, подсказывает, что упомянутые вероятности, по-видимому, малы. Однако до сих пор нет никакой теории, описывающей разницу между «обычными случаями» и «исключительными случаями» (когда те и другие представлены открытыми областями положительной вероятности в пространстве всех случаев).

Я предполагаю, что придать точный математический смысл описанным выше экспериментальным фактам было бы полезным и для теоретической математики, и для приложений.

Пытаясь двигаться в эту сторону, я изучал частоты разных неприводимых представлений группы симметрий осциллирующего многообразия в соответствующих пространствах собственных функций, соответствующих различным собственным числам. Экспериментальные результаты исследования первых нескольких миллионов собственных векторов магнитогидродинамической задачи были связаны с «проблемой быстрого кинематического динамо» астрофизиков (сформулированной А. Д. Сахаровым и Я. Б. Зельдовичем).

Эксперимент (где группа симметрий была конечной) показал, что кратности неприводимых представлений оказываются приблизительно пропорциональными их размерностям (как это происходит и с регулярным представлением группы в пространстве функций на ней).

Недавно я строго доказал, что эта асимптотическая пропорциональность кратностей размерностям является асимптотическим свойством всех наиболее частых унитарных представлений группы в комплексном пространстве  $\mathbb{C}^N$  большой фиксированной размерности  $N \rightarrow \infty$ .

Представление  $T$  называется *частым*, если размерность многообразия  $M(T)$  унитарно эквивалентных представлению  $T$  представлений группы в том же пространстве  $\mathbb{C}^N$  имеет максимальное значение  $\dim M$  (по сравнению с другими представлениями в том же пространстве).

Таким образом, эксперимент показывает, что природа выбирает для осциллирующего многообразия именно наиболее вероятное представление группы симметрий (в пространстве первых  $N$  собственных векторов).

Однако этот результат (выбор природой наиболее частого представления) остаётся эмпирическим наблюдением, а не доказанной теоремой: я не доказал строго необходимость наиболее частого пред-

ставления в пространстве собственных векторов, а лишь подтвердил его всего несколькими миллионами примеров.

Для доказательства было бы достаточно достичь некоторой регулярности границ фундаментальных областей действия группы симметрий на осциллирующем многообразии (например, годятся полиэдральные границы). Но я не умею доказывать существование таких фундаментальных областей ни для произвольных групп симметрий, ни хотя бы для изометрических действий общего положения конечных групп на компактных римановых многообразиях (что уже доставило бы обоснование частоты представления собственными векторами во многих ситуациях).

Теория бифуркаций периодических орбит привела Пуанкаре к статистике непрерывных дробей. Дело в том, что соизмеримости периодов вращения планет вокруг Солнца ответственны за большие «вековые» возмущения, и распространённость таких возмущений зависит от точности рациональных приближений отношений периодов  $\lambda = T_1/T_2$  дробями  $\lambda \approx p/q$ , где целые числа  $p$  и  $q$  не слишком велики.

Отличие приближающей дроби от величины  $\lambda$  описывается в теории диофантовых приближений разложением в цепную дробь

$$\lambda = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

Оборвав дробь перед большим элементом  $a_k$ , мы получим очень хорошее приближение к числу  $\lambda$ , и возможность столь хороших приближений зависит от наличия в разложении числа  $\lambda$  в цепную дробь больших неполных частных  $a_k$ .

«Золотое сечение»

$$\lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,61 \dots$$

приближается хуже всего (все неполные частные  $a_k$  равны в этом примере единице). Последовательные оборванные непрерывные дроби доставляют в этом случае приближения  $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$  (числители и знаменатели составляют последовательность Фибоначчи  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ ).

Чтобы изучить наличие больших вековых возмущений планетных движений в небесной механике, нужно знать статистику встречаемости различных неполных частных  $a_k$  в разложении в цепную дробь соответствующих вещественных чисел  $\lambda$ , которые в астрономии зависят от начальных условий. Астрономы составили таблицы наблюдаемых значений этих чисел.

Но подобную задачу можно сформулировать и в теории вероятностей: каково распределение различных целых чисел среди неполных частных  $a_0, a_1, \dots$  разложения в цепную дробь случайно выбранного вещественного числа  $\lambda$ ?

Гаусс по меньшей мере угадал ответ на этот вероятностный вопрос: частота  $p_j$  значений  $a_k = j$  убывает с ростом значения неполного частного  $j$  квадратично, а именно

$$p_j = c \ln \left( 1 + \frac{1}{j(j+2)} \right).$$

Коэффициент  $c$  определяется из нормализующего частоты условия  $\sum p_j = 1$ , что приводит к равенству

$$c = \frac{1}{\ln 2}.$$

Частота неполного частного  $j = 1$  очень велика, почти 50%, но большие значения  $j$  неполного частного встречаются с малой частотой  $p_j$ , если число  $\lambda$  выбрано случайно.

Я расскажу теперь несколько деталей длинной истории этого экспериментального результата начиная с вопроса Пуанкаре, связанного с его приложениями к небесной механике.

Гаусс, вероятно, был первым, кто заметил инвариантность меры с плотностью  $dx/(1+x)$  на интервале  $0 < x < 1$  по отношению к преобразованию, переводящему число  $x$  в дробную долю числа  $1/x$ .

Приведённые выше «вероятности»  $p_j$  появляются как интегралы этой плотности вдоль интервалов, где целая часть числа  $1/x$  принимает соответствующее значение  $j$ .

В 1928 г. Р. Кузьмин доказал, что постоянные  $p_j$  действительно являются асимптотическими частотами целых чисел  $j$  среди неполных частных случайного вещественного числа  $\lambda$ : эта асимптотика нарушается только для исключительного множества необычных чисел  $\lambda$ , имеющего на вещественной оси лебегову меру нуль (это исключительное множество содержит все рациональные числа, золотое сечение и все квадратичные иррациональности).

Я не знаю, мог ли Гаусс доказать или хотя бы сформулировать эту теорему Кузьмина: ведь для этой формулировки нужна лебегова мера.

Для Пуанкаре существование асимптотики Кузьмина не было бы неожиданным, он уже сформулировал соответствующие формы эргодической теоремы, пытаясь помочь Больцману в его эргодическом подходе к статистической механике. Всюду плотные исключительные множества меры нуль необходимы во всех таких результатах эргодической теории.

Доказательство теоремы Кузьмина лучше всего изложено в книжке Хинчина «Цепные дроби». Оно сводится к проверке эргодичности динамической системы Гаусса

$$x \mapsto \frac{1}{x} - \left[ \frac{1}{x} \right].$$

Трудность состоит, однако, в том, что в 1928 г., когда появилась теорема Кузьмина, эргодической теоремы Биркгофа, на которой основано доказательство Хинчина, ещё не было. Можно предполагать, что Кузьмин, в сущности, доказал теорему Биркгофа (по меньшей мере — для нужной ему специальной системы), и было бы интересно понять, осознал ли он справедливость общей теоремы, доказывая свой замечательный результат.

Эксперименталистская часть истории теоремы Кузьмина о распределении неполных частных содержит ещё несколько замечательных эпизодов. Следуя предложению Пуанкаре, астроном Гильден опубликовал в «Докладах Парижской академии наук» (C. R. Acad. Sci., Paris, v. 107, 1888) заметку «Несколько замечаний о представлении иррациональных чисел цепными дробями».

Его исследования были позже продолжены в двух огромных статьях:

*Wiman A.* Über eine Wahrscheinlichkeits aufgabe bei Kettenbruchentwicklungen. — Akad. Föhr., Stockholm, v. 57, 1900, pp. 589–841;

*Brodén T.* Wahrscheinlichkeits Bestimmungen bei der Gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung Reeller Zahlen. — Akad. Föhr., Stockholm, v. 57, 1900, pp. 239–266.

Я не сумел проверить, доказали ли авторы этих статей или хотя бы сформулировали ли они результат Кузьмина (а также теорему Биркгофа или нужный её частный случай).

Результаты математических экспериментаторов часто теряются при последующем развитии науки: знаменитая «теория колебаний» Андронова была написана в 1937 г. тремя авторами — Андроновым, Хайкиным и Виттом, — но третья фамилия появилась на обложке книги только много лет спустя, когда издательство объяснило, что Витт не был назван раньше «вследствие трагической ошибки». Что такое «трагическая ошибка 1937 г.», было сразу ясно российскому читателю: Витт был расстрелян в Гулаге.

В других случаях результаты неправильно приписываются эпигонам первооткрывателей и по другим причинам, но нужно стараться по возможности восстанавливать истинное происхождение открытий.

Ниже я обсужу происхождение теории обобщённых функций. Эта удивительная история была мне рассказана А. Н. Колмогоровым, Л. Шварцем и С. Л. Соболевым.

Примерно в 1916 г. Санкт-петербургский математик Н. Гюнтер разработал теорию, которую он назвал «теорией функций областей». Его идея состояла в том, что такие физические понятия, как «материальная точка», «точечный заряд» и «сосредоточенный в точке вихрь поля скоростей жидкости», не поддаются описанию в терминах обычных функций плотности, в то время как интегралы от этих «плотностей» по различным областям — честные математические объекты (а отличие от плотностей, всюду равных нулю или бесконечности, но имеющих конечные интегралы).

Он придумал эту теорию «функций областей» ради гидродинамических приложений, например, к уравнениям Навье — Стокса. Более поздние знаменитые результаты Ладыженской являются обобщением теорем Гюнтера на другие функциональные пространства (как и Гюнтер, Ладыженская доказала теоремы существования решений трёхмерной задачи с некоторыми особенностями при теореме единственности решений с меньшими особенностями: она долго думала, как и Лере, что турбулентность есть физическое проявление неединственности, в то время как естествоиспытатели давно уже понимали её как неустойчивость и быстрое развитие малых возмущений начальных условий, на что указывал уже Пуанкаре, объяснявший этим невозможность долгосрочного динамического прогноза погоды).

Лет десять спустя после публикаций Гюнтера российское математическое сообщество начало «изживать лузинщину в нашей среде», обвиняя в антипролетарском аристократизме и высокомерии Лузина в Москве и Гюнтера в Ленинграде.

Поэтому Гюнтер позаботился о воспитании пролетарских и даже коммунистических учеников. Лучшим из них оказался дворянин С. Л. Соболев, которому Гюнтер предложил применить свою теорию функций от областей к волновому уравнению и к гиперболическим системам, имея в виду и общественно-полезные сейсмологические приложения. Соболев доказал и опубликовал соответствующие теоремы.

Но, как сказал мне Л. Шварц в 1965 г., Соболев совершил при этом следующую роковую ошибку: «Он опубликовал свою теорию в малоизвестном провинциальном журнале, на малоизвестном языке».

Шварц сразу же ответил на мой естественный вопрос о журнале и языке: статьи Соболева были опубликованы в «Докладах Парижской академии наук» (C. R. Acad. Sci., Paris) в 1934 г. по-французски.

«Мой вклад, — добавил Шварц, — состоял в переводе теории Соболева на английский язык и в публикации её в распространённом и читаемом журнале, под именем *теории распределений*, тогда как Соболев говорил об *обобщённых решениях дифференциальных уравнений*».

Вернувшись в 1965 г. из Парижа в Москву, я обсудил всё это с Сергеем Львовичем Соболевым, который сказал мне, что вклад Шварца значительно больше, в особенности при описании преобразований Фурье распределений (т. е. обобщённых функций).

Соболев правильно ссылался на предшествовавшие работы своего учителя Гюнтера (эти ссылки исчезли лишь в более поздних изложениях теории «обобщённых функций Соболева»). Колмогоров, создав теорию кохомологий, опубликовал её в четырёх заметках 1935 г. (тоже по-французски и тоже в CRAS), отмечая во введении к своей статье, что его теория кохомологий происходит от результатов экспериментальной математики, формализованных в понятиях «потока» несжимаемой жидкости через поверхность и обобщающих формулы теории магнитного поля, связанные с коэффициентами зацепления кривых, причём он явно ссылается на теорию функций от области Гюнтера как на вдохновляющий его пример.

Построенная Колмогоровым теория кохомологий — алгебраическая конечномерная комбинаторная конструкция, которая переводит на алгебраический язык конечномерных сопряжённых пространств аналитическую теорию Гюнтера функций от областей, являющихся элементами бесконечномерного сопряжённого пространства к обычному пространству функций.

При этом Колмогоров считал свою теорию кохомологий комбинацией описанной Пуанкаре версии теоремы де Рама (объяснённой не понявшим Пуанкаре математиком Эли Картаном) с принадлежащими Гюнтеру идеями экспериментальной математики.

Как видно, самые важные достижения современной теоретической математики были получены формализацией и аксиоматизацией предшествовавших им пионерских исследований экспериментально-математических первопроходцев.

Интересно, что и  $\delta$ -функции Дирака (представляющие собой частный случай предшествовавших им на несколько десятилетий функций от областей Гюнтера) были введены в математику в эксперименталистском исследовании.

Обсуждая пути развития физики, Дирак написал: «Я учился отвергать все физические представления в качестве основ новой теории.

Вместо них начинать нужно с математической схемы, даже, на первый взгляд, не связанной с физикой. Главное — достичь интересной математики» (цит. по: *Massani P. N. Wiener. Birkhäuser, 1990. P. 6*).

Согласно Дираку, «физические представления» — это просто вежливое название предрассудков предшествовавших поколений.

Вот как Дирак применял свой метод для экспериментального объяснения топологии спинов. Соответствующая математическая теорема  $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$  влечёт за собой существование элементов второго порядка в группе сферических кос.

Это значит, что можно связать сферическую поверхность с другой (концентрической), большей сферической поверхностью четырёхъя (трансверсальными промежуточным сферам) верёвками («нитьями») так, что если после этого соединить таким же образом концевые точки нитей с подобными же точками на ещё большей концентрической сфере, то при уничтожении средней их трёх сфер самая меньшая сфера будет связана с самой большей четырёхъя нитями тривиальным образом (так что эту связь можно продеформировать в связь четырёхъя радиальными нитями, не сталкивая нити в процессе непрерывной деформации).

Изучая приложения теории спинов к квантовой теории электронных систем (с её статистикой Ферми — Дирака), Дирак решил сперва экспериментально проверить упомянутый результат фундаментальной математики, а для этого физически реализовал описанные выше сферические косы второго порядка и сжёг среднюю сферу, после чего большая и меньшая сферы оказались связанными тривиально.

К сожалению, этот эксперимент Дирака не излагается при объяснении спинов ни студентам-математикам, ни физикам (в то время как Дирак не брался объяснить коллегам теорию спинов без этого экспериментального её подтверждения).

Тот факт, что большая часть абстрактно-математических теорем отражает свойства объектов реального мира, допускающие экспериментальную проверку, обычно скрывается от обучаемых при совершенном дедуктивно-аксиоматическом изложении этих утончённых математических теорий.

Жан-Жак Руссо описывает в своей «Исповеди», что никак не мог поверить в своё алгебраическое открытие, что

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

хотя и знал, что раскрыл скобки правильно. Единственным рассуждением, убедившим его в правильности формулы, был рис. 12.

**Рис. 12.** Экспериментальное доказательство алгебраической формулы из «Исповеди» Ж.-Ж. Руссо

$b$	$ab$	$b^2$
$a$	$a^2$	$ab$
	$a$	$b$

К сожалению, подобные экспериментальные методы объяснения алгебры совершенно отсутствуют в современных образовательных системах.

Приведу ещё один пример важного и практически полезного математического открытия, сделанного в процессе экспериментирования. «Явление Гиббса» было случайно открыто великим американским физиком Гиббсом при численном суммировании рядов Фурье, которым ему пришлось заняться ради прогнозирования приливов.

Сегодня наиболее яркие применения это открытие находит в томографии, а в учебниках анализа оно почему-то даже не упоминается (приятное исключение — очень интересный, но редко используемый учебник Куранта).

Главное в явлении Гиббса то, что *предел графиков всюду сходящейся последовательности функций может сильно отличаться от графика предельной функции* (что от студентов обычно скрывается).

Дело в том, что понятие сходимости последовательности функций весьма нетривиально. Ньютон не давал формального определения. Современное « $\varepsilon$ - $n$ »-определение было впервые опубликовано Коши. Одна из первых теорем этого наводителя строгости в анализе была опубликована в его учебнике: «предел всюду сходящейся на отрезке последовательности непрерывных функций непрерывен».

Абель, который не сумел понять доказательство Коши этой теоремы, привёл контрпримеры (годится, например, последовательность функций  $x^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , на отрезке  $[0, 1]$ : она сходится к нулю при любом  $x < 1$  и к 1 в конечной точке  $x = 1$ ).

Вейерштрасс понял позже, что поточечная сходимость определения Коши является неадекватной аксиоматизацией реальной естественно-научной ситуации: он ввёл равномерную сходимость, которая делает непрерывной предельную функцию.

Наблюдение Гиббса состояло в том, что графики функций неравномерно сходящейся последовательности могут сильно отличаться от графика предельной функции.



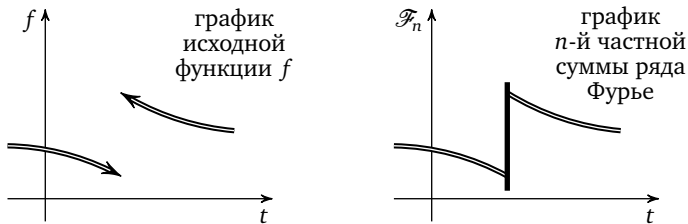


Рис. 13. Явление Гиббса

Заметил он это при анализе частных сумм ряда Фурье разрывной функции (в окрестности простейшей точки разрыва, где левый и правый пределы функции различны, как для функций  $\text{sign } x$  вблизи точки  $x = 0$ ).

Нарисовав графики частных сумм ряда Фурье, он заметил экспериментально, что эти графики аппроксимируют более длинный вертикальный отрезок, чем естественное соединение левой и правой ветвей графика разлагаемой в ряд Фурье разрывной функции (рис. 13).

А именно, этот вертикальный отрезок примерно на 18% длиннее, чем необходимая величина разрыва.

Доказательство этого неожиданного математического результата не так уж трудно, достаточно явно разложить в ряд Фурье одну разрывную функцию (например,  $f(t) = \text{sign } \sin t$  со скачками  $\pm 2$  при  $t = \pi$  и  $2\pi$ ). После этого остаётся приблизительно вычислить максимумы и минимумы частных сумм ряда Фурье (они окажутся равными примерно  $\pm 1,09$  при большом числе гармоник в частной сумме).

Насколько я знаю, эффект Гиббса ускользнул от внимания теоретико-числовиков, которым следовало бы исследовать поведение (вблизи точек разрыва) рядов Фурье по кусочно постоянным функциям вроде  $\text{sign } \sin(kt)$  и  $\text{sign } \cos(kt)$ .

Я сосчитал их для  $2\pi$ -периодической функции  $f$ , равной  $-1$  при  $0 < t < 2\pi\lambda$  и  $+1$  при  $2\pi\lambda < t < 2\pi$ . По-видимому, эффект типа явления Гиббса зависит здесь от поведения разложения параметра  $\lambda$  в цепную дробь. Для золотого сечения  $\lambda$  я нашёл больший 9% Гиббса дополнительный отрезок, но никаких асимптотических теорем, описывающих эти явления, я не доказал.

Приложения явления Гиббса в томографии очень важны: на томограммах врачи видели странные прямые линии, не отражающие на самом деле никаких границ биологического происхождения, но происходящие вследствие явления Гиббса при компьютерной обработке

наблюдаемого сигнала, включающей суммирование ряда Фурье. Не знавшие явления Гиббса врачи принимали эти компьютерные артефакты за проявления таинственных болезней и пытались их лечить.

Ниже я поясню, почему явление Гиббса приводит к появлению на томограммах лишних прямых линий.

Томографическое изображение описывает плоское сечение тела. Плотности различных тканей тела различны, и они описываются функцией двух переменных. Наблюдаются поглощения различных лучей  $R(\varphi, p)$  в плоскости сечения тела: угол  $\varphi$  определяет направление луча, а параметр  $p$  нумерует параллельные лучи, будучи расстоянием от некоторого центрального луча заданного направления.

Ослабление волны, распространявшейся вдоль этого луча, измеряется приборами, доставляя информацию об интеграле

$$F(\varphi, p) = \int f(r) dr, \quad r \in R(\varphi, p),$$

где  $f(x, y)$  — некоторая характеристика плотности тела в точке  $r = (x, y)$  луча  $R$  (рис. 14).

Следующий шаг состоит в восстановлении функции  $f$  по измеренным значениям функции  $F$  (это восстановление называется «обратным преобразованием Радона», так как переход от  $f$  к  $F$  называется преобразованием Радона).

Обратное преобразование Радона осуществляется компьютерно, с использованием техники преобразования Фурье.

Действительно, коэффициенты Фурье функции  $f$

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \iint e^{i\tilde{x}x + i\tilde{y}y} f(x, y) dx dy$$

являются одномерными коэффициентами Фурье преобразования Радона, так как написанный выше двойной интеграл можно переписать в виде одномерного интеграла

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int e^{i(\tilde{r}, r)} I(r) dr,$$

где  $I(r)$  обозначает интеграл функции  $f$  вдоль прямой линии

$$\tilde{x}x + \tilde{y}y = r.$$

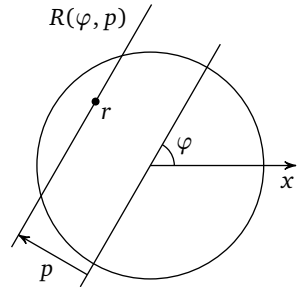


Рис. 14. Преобразование Радона  $F$  описывающей плотность тела функции  $f$ , измеряемое томографом

Для вычисления функции  $f$  достаточно сосчитать интеграл (практически сумму) её гармоник Фурье, амплитуды которых доставляются одномерными коэффициентами Фурье преобразования Радона  $F$ , измеренного томографическим рецептором.

Эти простые рассуждения составляют весь замысел томографии. Но при практическом суммировании ряда Фурье (или интеграла) существенна гладкость функции, разлагавшейся в ряд (или интеграл) Фурье: коэффициенты Фурье высокого порядка гладкой функции быстро убывают с ростом порядка коэффициента (который выше обозначался символами  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  в двумерном случае и символом  $\tilde{r}$  в одномерном).

Плотность человеческого тела  $f(x, y)$  — не всюду гладкая функция, она даже разрывна (например, на границах костей). Поэтому при суммировании ряда Фурье, выполняемом компьютером для вычисления обратного преобразования Радона  $F \mapsto f$ , в точках разрыва возникает явление Гиббса.

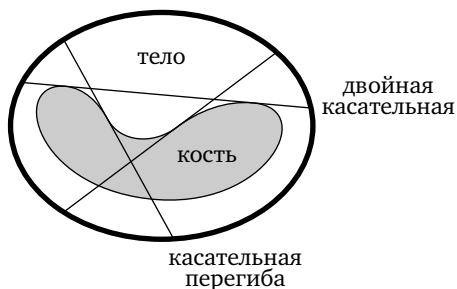
В обычном одномерном случае, обсуждавшемся выше, артефакты (лишние 9 % отрезка между ветвями графика на рис. 14) сосредоточены в точках разрыва.

В двумерном случае каждая гармоника Фурье представляет собой плоскую волну, постоянную вдоль линий волнового фронта. Явление Гиббса, происходящее от плохой сходимости в присутствии разрыва, порождает артефакты вдоль всей касательной прямой к кривой разрывов.

Возникающие вследствие этого чрезвычайно большие значения искомой функции  $f$  особенно велики в точках двойных касательных прямых (касающихся границы костей в двух точках), а также в точках касательных прямых к линии границы кости, проведённых в точках перегиба этой линии.

Поэтому томографическое изображение плоского сечения вашего тела будет содержать, наряду с ограничивающими изображения костей кривыми линиями, странные прямые линии (отсутствующие внутри вашего тела): эти линии касаются ограничивающих кости кривых дважды или в точках перегиба (рис. 15).

Взаимодействие экспериментальных наблюдений с глубокими математическими теориями ясно видно в описанном выше примере (томографических артефактов, происходящих от явления Гиббса). Но во многих других случаях подобное взаимодействие менее очевидно, особенно когда соответствующие математические теории слишком трудны для экспериментатора.



**Рис. 15.** Томографические артефакты, порождённые явлением Гиббса на границах изображений костей

Знаменитый физик, нобелевский лауреат Л. Д. Ландау часто объяснял многие трудные явления совершенно необычными рассуждениями. Приведённые ниже примеры заимствованы из пародии на его лекции, прочитанной на сцене во время чествования дня рождения Ландау студентами Московского физико-технического института (в то время, когда Ландау был ещё вполне активен, в годы, предшествовавшие авткатастрофе).

— Утверждение Ландау: «Все нечётные числа простые: число 3 просто, 5 просто, 7 тоже просто...»

— Вопрос студента: «А число 9 тоже просто?»

— Ответ Ландау: «Конечно, нет,  $9 = 3 \cdot 3$ . Я забыл упомянуть об этом исключении, о числе 9. Смотрите: 11 и 13 опять простые...»

— Вопрос студента: «А пятнадцать?»

— Ответ Ландау: «15 — ошибка эксперимента, 17 и 19 опять простые».

«Курс арифметики Ландау» содержал много замечательных открытий:

«пятью пять — двадцать пять, шестью шесть — тридцать шесть. Следовательно, семью семь — сорок семь».

Мне было трудно слушать подобные лекции, поэтому я ни разу не ходил на лекции Ландау. Но его ученики и сотрудники много раз демонстрировали мне его замечательный стиль ведения семинара, и мне хватало этого опыта, приобретённого в студенческие годы в Московском университете, так что я так ни разу и не видел Ландау, а только переписывался с ним.

Вот что я слышал на таком семинаре во время доклада иностранного профессора Х., рассказывавшего о своих недавних открытиях в Москве. Через несколько минут после начала доклада пожилой мос-

ковский профессор Ш. сформулировал вопрос: «вы сказали, что  $A$  меньше, чем  $B$ , но я не понимаю, почему  $A < B$ ».

Лидер семинара (ученик Ландау) возразил: «это не вопрос, а утверждение: ты не понимаешь, потому что ты дурак».

Но Ш. настаивал, и тогда лидер семинара сказал: «ладно, старые профессора ничего уже не могут, но первокурсник Д. за несколько секунд справится с его трудностью».

Через пять минут не справившийся первокурсник был заменён аспирантом К., и ещё через десять минут лидеру пришлось самому показывать семинару, как надо работать.

Но и он не справился — пришлось просить помощи у докладчика Х., который быстро доказал, что  $A > B$ .

Профессор Ш. просял: «Теперь всё в порядке, у меня ведь был с самого начала контрпример к утверждению докладчика, что  $A < B$ , из-за этого я и задал свой вопрос!»

Привыкнув к подобному стилю семинаров учеников Ландау, я почему-то никогда не выступал в роли Д. или К. в предыдущей дискуссии. Но я внимательно изучал один за другим многие тома учебника Ландау и Лифшица и, когда мне было около 20 лет, послал Ландау письмо, где перечислил несколько дюжин ошибок этих книг: иногда я писал, что семью семь не совсем сорок семь, но в других случаях окончательный ответ был правильно списан авторами из других учебников, но имевшиеся там «трудные» доказательства оказались замечательными недоступным моему пониманию вздором.

Через несколько недель Ландау ответил мне, что все мои замечания справедливы и что они будут учтены в ближайшем переиздании учебников, которое состоится в Америке через два года.

Два года спустя я прочитал новую версию. Ошибочные рассуждения были заменены совершенно новыми доказательствами, которые, однако, были совершенно ошибочными (доставляя «короткие доказательства» трудных верных математических теорем, обычно доказываемых на многих страницах).

Позднее, когда Ландау уже не мог работать, его ученики и сотрудники Зельдович и Питаевский попросили меня переписать ошибочные доказательства Ландау (для нового русского издания), так что в последних изданиях неверные доказательства Ландау заменены моими верными.

Но следовать логике стиля Ландау я так и не научился. Так, моя статья об адиабатических инвариантах была отвергнута главным российским физическим журналом (ЖЭТФ) со следующим объяснением (кото-

рое мне сообщил бывший тогда заместителем главного редактора Михаил Александрович Леонтович): «В статье утверждается, что из  $A$  вытекает  $B$ , в то время как каждый физик знает, что  $A$  из  $B$  не вытекает».

Я пытался объяснить, что эти знания, доступные и мне, ничуть не противоречат моему утверждению, но Михаил Александрович убедил меня, что, согласно Ландау, утверждение «из  $A$  вытекает  $B$ » означает, что « $A$  и  $B$  эквивалентны».

Отвергнутая статья была опубликована в математическом журнале, а год спустя Гарфилдсовский журнал «Индекс цитирований» попросил меня объяснить причины необычно большого числа цитирования этой статьи (насчитав тысячи цитировавших физиков и специалистов по космическим исследованиям, но ни одного математика). Ещё через год эта статья была удостоена Ленинской премии (она входит в цикл работ Колмогорова и Арнольда, известных сегодня как «теория КАМ»). Интересно, что математическое подразделение Комитета по премиям отвергло все эти работы, считая их слишком прикладными (т. е. относящимися к небесной механике, теории магнитных ловушек плазмы, адиабатическим инвариантам и вращению искусственных спутников — какая же это математика? Математики должны исследовать пустые множества и нигде не дифференцируемые группы!) Однако на общем заседании всего Комитета работы Колмогорова и Арнольда были признаны достойными Премии (за счёт голосов тех же физиков, которые отвергли одну из главных работ этой серии в ЖЭТФ).

Я предполагаю, что недооценка относящихся к реальному миру работ математиками объясняется тем, что экспериментально-математический характер этих исследований слишком труден для дедуктивных аксиомофилов, привыкших исследовать уравнения, не имеющие решений, или всюду расходящиеся ряды.

Чтобы объяснить разницу точек зрения «дедуктивных математиков» и «эксперименталистов» на простейшие понятия математики, я обшуку сейчас определение производной.

Следуя Ньютону, я верю, что

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \sec^2 x.$$

Точка зрения дедуктивных аксиомофилов — совершенно другая. Они говорят, что тангенс — функция недифференцируемая, так как дифференцируемые функции непрерывны, а тангенс — нет.

Что теряется при таком подходе — совершенно ясно. Менее очевиден следующий пример, связанный с гидродинамической теорией

турбулентности. Я рассказал о некоторых новых идеях в этой области в 1965 г. на семинарах Р. Тома и Дьёдонне, упомянув, в том числе, о приложениях теории бифуркаций Пуанкаре и Андронова к исследованию роста размерности аттракторов при росте числа Рейнольдса и об отрицательности кривизны группы диффеоморфизмов, ведущей к невозможности долгосрочного динамического прогноза погоды.

Реакция «чистых» математиков была для меня неожиданной. Дьёдонне категорически возражал против обсуждения связи между римановыми кривизнами и метеорологией (как и вообще против любой «нечистой» науки, отличной от аксиомофильского переливания из пустого в порожнее).

Другие слушатели, более молодые, опубликовали то, что я им рассказал, под именем принадлежащих им гипотез. Тем самым они исправили мою ошибку, состоявшую в том, что я своего тогдашнего доклада не опубликовал. Интересно, что некоторые из моих гипотез, сформулированных в этом докладе, аксиомофилы считают доказанными в их последовавших работах, тогда как я считаю эти гипотезы не доказанными и сегодня.

Одна из гипотез (принадлежавшая Колмогорову) состояла в том, что предельные режимы решений уравнений Навье — Стокса бифурцируют при уменьшении вязкости (или при увеличении числа Рейнольдса) от ламинарного течения (соответствующего точечному аттрактору векторного поля в пространстве полей скоростей жидкости) к предельным режимам большей размерности.

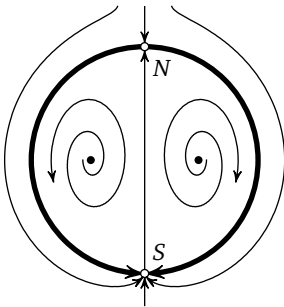
Сначала аттрактором становится предельный цикл (соответствующий периодическим пульсациям поля скоростей жидкости), а затем предельный режим становится более сложной динамической системой большей размерности (для которой первоначально малые возмущения начального условия приводят к экспоненциально растущему со временем возмущению результирующего предельного режима течения жидкости).

Эта гипотеза Колмогорова имела у него два варианта. Первое утверждение состоит в том, что при достаточно больших числах Рейнольдса появляются многомерные предельные режимы, а второе — в том, что все маломерные (включая предельные циклы, двумерные предельные множества и т. д.) исчезают при достаточно больших числах Рейнольдса (так что все ламинарные течения становятся неустойчивыми, как и все периодически пульсирующие течения и т. п.).

Склонные к дедуктивной математике специалисты формализовали эти утверждения Колмогорова в виде гипотез об аттракторах. Ат-

трактором называется такое инвариантное подмножество фазового пространства динамической системы, что всякая траектория, начинающаяся в его достаточно малой окрестности, с течением времени приближается асимптотически к этому аттрактору.

Эти формально определённые аттракторы аксиомафилов — вовсе не те «предельные режимы», о которых говорил Колмогоров, и существование многомерного аттрактора несколько не противоречит маломерности соответствующего предельного режима, как я сейчас объясню.



**Рис. 16.** Одномерный аттрактор в системе с нульмерным предельным режимом  $S$

Предположим, например, что фазовое пространство содержит инвариантную окрестность, притягивающую все соседние орбиты (рис. 16).

Вдоль инвариантного одномерного многообразия векторное поле, изображённое на рис. 16, устроено так: имеются два положения равновесия (точки  $N$  и  $S$ ), где вектор поля равен нулю, а между ними векторы поля направлены вдоль инвариантной окружности от  $N$  к  $S$ .

Эта система имеет одномерный аттрактор (окружность), так что при помощи такой системы можно доказывать рост размерности аттрактора (от нуля до единицы). Однако предельное поведение системы при почти любом начальном условии выводит её к «ламинарному» аттрактору  $S$  размерности нуль: инвариантная окружность удовлетворяет дедуктивно-аксиомафильскому определению аттрактора, но с экспериментальной и естественно-научной точки зрения этот аттрактор — вовсе не тот предельный режим, о котором идёт речь в гипотезе Колмогорова.

При формализации относящихся к реальному миру идей в дедуктивно-аксиоматической системе нужно быть очень осторожным, так как абстрактные понятия обладают опасным скрытым свойством неадекватного описания явлений. Это замечание было явно сформулировано уже Р. Бойлем («Hydrostatical Paradoxes», The Works, London, 1772, v. 2, pp. 739–740): «Экспериментальные доказательства предпочтительнее математических, так как последние основаны на предположениях и постулатах, которые легко могут вести к ошибкам вследствие абстрактной природы математических объектов».

Заключение Бойля, что никаким математическим рассуждениям нельзя доверять при объяснении явлений природы, является, однако,



преувеличением. Это преувеличение объясняется, вероятно, странной философией его эпохи, особенно ярко выразившейся в картезианских принципах развития науки.

Из нескольких дюжин принципов Декарта я процитирую здесь только четыре особенно опасных принципа.

Первый принцип: *никогда не следует сравнивать исходные положения теорий с какой-либо реальностью при помощи экспериментов, эти исходные положения — просто произвольные высказывания, и вопрос об их адекватности явлениям реального мира не имеет никакого научного значения.*

Второй принцип: *никогда не следует сравнивать с экспериментами окончательные выводы научных теорий.* Если исходные положения противоречили наблюдениям реального мира, то нет причин надеяться на отсутствие таких противоречий у окончательных выводов.

«Третьим» я назову следующий принцип: *наука представляет собой цепь Аристотелевых дедукций, начинающуюся с исходных аксиом. Чтобы эти дедукции были научными, необходимо полностью исключить из них всякое участие воображения.*

В математике это означало прежде всего полное исключение геометрии, чертежи которой являются вдобавок рудиментами экспериментальной деятельности, запрещённой первыми двумя принципами, предоставляющими притом обильную пищу воображению.

Поэтому предлагалось исключить из математики все прямые, окружности, многогранники и т. п., заменяя их (в современных терминах) кольцами и алгебрами, идеалами и модулями.

Таковыми были исходные принципы создания «аналитической геометрии»<sup>1</sup>.

«Четвёртый» принцип Декарта был опаснее всех: он состоял в том, что *«правительству следует немедленно запретить все другие методы преподавания, кроме моего, который является единственным логически корректным методом, позволяя самым посредственным ученикам продвигаться в изучении наук столь же быстро, как и самым гениальным».*

---

<sup>1</sup> Система «декартовых координат» (Манхэттена) была изобретена за много веков до Декарта: положение каждого легиона в римском лагере определялось ортогональными проекциями места его стоянки на две основные магистрали лагеря, Запад — Восток и Север — Юг. В Париже и сейчас имеется знак «Jeux Descartes» в точке пересечения этих осей древнего римского лагеря латинского квартала, сохранившего здесь прямоугольную планировку (это начало координат находится на пересечении улиц Сен Жак и Школ вблизи Сорбонны), но надпись «Jeux Descartes» интерпретируется сегодня как «jeux des cartes» («игры в карты») и используется для продажи карточных колод.

Принципы Декарта были осуждены Монтенем за много лет до их публикации Декартом. Согласно Монтеню, французская наука и французские учёные отличаются от всех других следующим: ни одно их слово не должно никому быть понятным (иначе читатели и слушатели сочтут, что автор не внёс ничего нового), и полностью отсутствуют ссылки на предшественников (особенно иностранных).

Монтень написал, что такие недостатки никогда не потерпела бы ни одна цивилизованная страна (он упоминает в качестве примеров Рим и Испанию, Англию и Голландию, Германию и Швецию).

В качестве многолетнего члена «Комитета по защите наследия французской науки от иностранцев» бывшего Министерства науки, образования и технологии Республики Франция я могу подтвердить устойчивость приведённых характеристик французской науки и французских книг, опубликованных Монтенем в 1585 г. (в книге, посвящённой им королеве Марго).

Чтобы показать, как практически применялись принципы Декарта, я опишу ниже его дискуссию с Паскалем о гидродинамических и барометрических открытиях последнего.

Первая реакция Декарта была протестом против нарушения опытами Паскаля первого принципа Декарта: Декарт объяснил Паскалю, что его опыты научной ценности не имеют, а нужно выводить следствия из аксиом.

Паскаль ни о каких аксиомах гидростатики не слышал, и тогда Декарт процитировал ему аксиому Аристотеля: «природа не терпит пустоты». На этом основании Декарт отбросил «торичеллеву пустоту», которую наблюдал Паскаль. Позже Декарт даже написал Гюйгенсу: «что же касается пустоты, то я её нигде в природе не нахожу, кроме как, быть может, в голове у Паскаля»<sup>1</sup>.

Несколько месяцев спустя после беседы Паскаля с Декартом теория Паскаля стала общепринятой. Друзья спрашивали Декарта, како-

---

<sup>1</sup> Подробное описание взаимодействий Декарта с Паскалем и с Гюйгенсом опубликовано в газете *Монд* (*Le Monde*, 3 avril 1998, p. 24) в статье Hengree Gee («L'Auvergne, berceau du voyage spatial»).

Дальнейшие ссылки на взаимодействия Декарта (и Ньютона) с другими учёными имеются в обширной библиографии книги химика И. С. Дмитриева «Неизвестный Ньютон» (СПб.: Алетея, 1999).

Следующие обскурантистские слова Декарта опубликованы в первом томе его избранных сочинений (М.: Мысль, 1989, с. 419–420): «Следовать выдуманной причине явлений столь же полезно, как и настоящим: успех может быть одинаковым, когда мы исследуем следствия подлинных и надуманных причин, даже когда последние ошибочны».

го он мнения об открытиях этого молодого человека. Ответ Декарта был вполне искренним: «Он мне рассказывал свою теорию несколько месяцев назад, но ничего не понимал, так как даже не знал соответствующих аксиом. Но я ему всё объяснил, и теперь он выдаёт мою теорию за свою».

Я высоко ценю замечательные математические открытия Декарта. Например, «правило Декарта» оценивает число положительных корней многочлена числом перемен знаков в последовательности его коэффициентов, и это правило явилось основой важной сегодняшней теории «малочленов» моих студентов (прежде всего — Севастьянова, Кушниренко и Хованского).

А именно, число перемен знаков не может превосходить число ненулевых коэффициентов многочлена. Теория малочленов доставляет картезианскую версию теоремы Безу: число корней полиномиальной системы уравнений в многомерном вещественном пространстве оценивается сверху числом одночленов, входящих в многочлены системы (это число корней может оказаться намного меньшим, чем оценка Безу, где место числа одночленов занимает степень многочлена).

Топологические инварианты алгебраических многочленов оцениваются в этой теории через число одночленов или через сложность формулы, задающей «малочлены». Грубо говоря, здесь действует принцип: для повышения на единицу какого-либо числа Бетти, измеряющего топологическую сложность алгебраического многообразия, нужно увеличить на единицу число членов в задающих многообразии формулах.

Некоторая часть этих малочленных оценок топологической сложности алгебраических многообразий сверху переносится и на топологические инварианты многообразий, заданных дифференциальными уравнениями (обыкновенными или с частными производными).

Однако такие вопросы, как вопрос 16-й проблемы Гильберта о числе предельных циклов векторного поля на плоскости, компоненты которого являются квадратичными многочленами, остаётся открытым, хотя предполагаемая оценка составляет всего четыре цикла.

Декартова теория радуги показывает, что её производят капли дождя, расположенные на поверхности конуса с раствором примерно  $43^\circ$ , ось которого направлена от глаза наблюдателя к противосолнечной точке. Это один из первых результатов теории каустик. Декарт вывел величину угла в  $43^\circ$  из индекса преломления воды, равного  $4/3$  (по закону Снелла).

Но Декарт вывел из этого же закона, будто скорость света в воде на треть *больше*, чем в воздухе. Это строгое заключение противоречит

и оптическому принципу Ферма, и принципу огибающих Гюйгенса теории распространения волн, и многим другим вещам, но эта ошибка Декарта является замечательным подтверждением слов Бойля, что абстрактная математика опасна для естествоиспытателя и что математические умозаключения подлежат проверять экспериментами.

Возвращаясь от «старинных мастеров» (молитвы мастеров Гумилёва) к сегодняшнему дню, я процитирую дискуссию между Л. С. Понтрягиным и Я. Б. Зельдовичем, написавшим замечательную книжку «Высшая математика для начинающих физиков и техников». Понтрягина оскорбило определение производной в этой книге как отношения приращения функции к (не слишком большому) приращению аргумента.

Понтрягин потребовал упоминания предельного перехода (при стремлении приращения аргумента к нулю). Зельдович, однако, отвечал: «Нет, это невозможно: когда приращение аргумента станет меньше  $10^{-30}$  или даже меньше  $10^{-8}$  сантиметра или секунды, то структура пространства и времени на столь малых расстояниях будет из-за квантовых эффектов столь сильно отличаться от математического континуума, что математические пределы потеряют всякую связь с описанием результатов экспериментов».

Согласно Зельдовичу нужны всегда именно отношения конечных приращений. Но вычислять их столь трудно, что обычно приходится использовать более просто вычисляемые асимптотические приближённые формулы, нужно только не забывать, что эти приближения пригодны лишь для определённой области изменения приращений, которые не должны быть ни слишком большими, ни слишком малыми.

Оставаясь математиком, несмотря на многолетнее и плодотворное сотрудничество с Зельдовичем, я приведу здесь ещё один пример разумной эксперименталистской критики абстрактной математики.

Мой близкий друг М. Л. Лидов был ведущим баллистиком, рассчитывающим орбиты искусственных небесных тел, спутников, лунных экспедиций и т. п.

Однажды, примерно около 1960 г., он сказал мне: «Теорема единственности твоего курса теории обыкновенных дифференциальных уравнений совершенно неверна, несмотря на совершенно строгое её доказательство» («в котором, — добавил он, — я не сомневаюсь»).

Дело в том, что интегральные кривые дифференциального уравнения  $dx/dt = -x$  с начальными условиями  $x(0) = 1$  и  $x(0) = 0$  явно пересекаются на любом компьютерном графике: при  $t = 30$  или даже 10 между этими кривыми не вставишь и атома.

Таким образом, совершенно правильное и строго доказанное математическое утверждение, что эти интегральные кривые не пересекаются, противоречит физической реальности.

Лидов объяснил мне, какое отношение эта теорема единственности имеет к технологии причаливания корабля к пристани. Эта технология состоит в том, что в последний момент матрос бросает на берег канат, а затем, спрыгнув туда сам, наматывает этот канат на кнехт и вручную притягивает судно, выбирая руками метр-другой каната.

Необходимость подобного ручного причаливания объясняется именно теоремой единственности, работающей здесь против нас.

Дело в том, что обычные принципы теории управления движением требуют выбирать скорость приближения к берегу  $dx/dt$  при помощи петли обратной связи, т. е. выбирать скорость в зависимости от оставшегося расстояния,  $dx/dt = f(x)$ .

Имея это в виду и предполагая функцию  $f$  гладкой (или хотя бы удовлетворяющей условию Липшица), мы выводим из теоремы единственности, что время причаливания должно быть бесконечным.

Или же следует полагаться на ненулевую скорость приближения в последний момент, т. е. удар о пристань (ради чего её край и обвешивается использованными автопокрышками, даже в случае, когда заключительный шаг причаливания выполняется вручную).

Причина, но которой Лидов знал все эти детали причаливания кораблей, состояла в том, что ему нужно было посадить ракеты на поверхность Луны. Управляемая мягкая посадка и здесь противоречит теореме единственности. Выбранный практически метод состоит в демфировании заключительного удара за счёт недолгих осцилляций колен «ног» треноги ракеты.

Лидов был и замечательным математиком. Однажды он поставил себе следующий вопрос. Орбита Луны образует небольшой угол (в несколько градусов) с плоскостью эклиптики, в которой Земля вращается вокруг Солнца. Малые колебания этого угла (в основном вызванные возмущающим движением Луны вокруг Земли притяжению Солнца) вызывают время от времени затмения.

Знаменитая теорема Лапласа об устойчивости (доказанная им только в первом приближении) состоит в том, что это движение Луны устойчиво: колебания орбиты остаются малыми в течение миллионов лет, и Луна остаётся на том же среднем расстоянии от Земли (равном около 60 радиусов Земли, т. е. примерно 380 000 км), никогда не падая на Землю и никогда не удаляясь от неё слишком далеко.

Вопрос Лидова состоял в следующем: а что случилось бы, если бы орбита Луны (имея такую же форму) была сильно наклонена к плоскости эклиптики (например, градусов на 80 вместо наблюдаемого наклона  $5^\circ$ )?

Конечно, практически невозможно так повернуть орбиту Луны. Но вполне возможно запустить на подобную сильно наклонённую орбиту «псевдолуна». Её кеплерова орбита движения относительно Земли будет возмущаться (прежде всего — притяжением Солнца), и вопрос состоит в том, сильно ли эти возмущения изменят со временем наклонённую орбиту?

Ответ оказался совершенно неожиданным: Лидов обнаружил, что такая псевдолуна упадёт на Землю очень скоро (примерно за четыре года).

Странность этого результата состоит в том, что он кажется противоречащим теореме Лапласа (которая утверждает, что большие оси кеплеровых эллипсов не имеют вековых возмущений, что означает приблизительное постоянство среднего расстояния от спутника до Земли в течение длительного времени).

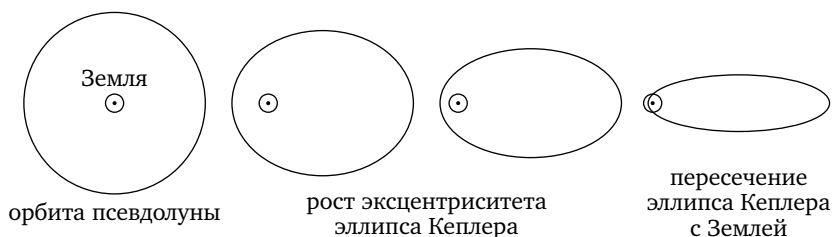
Лидов, однако, объяснил мне, что никакого противоречия с теоремой Лапласа нет: среднее расстояние (и, значит, длина большой полуоси кеплерова эллипса) останется почти постоянным во всё время падения, и длина этой полуоси составит прежние 380 000 км даже в самый момент падения.

А именно, хотя длина большой полуоси эллипса остаётся почти постоянной, его эксцентриситет будет расти, так что эллипс, который был первоначально почти окружностью, сделается тонким, приближаясь под конец к (дважды пройденному) отрезку длиной  $2 \cdot 380\,000$  км. Псевдолуна будет двигаться по такому утончающемуся эллипсу.

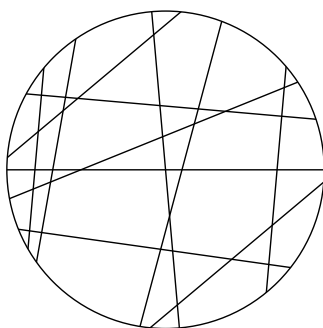
Но Земля — не точка, а шар (радиуса около 6400 км). Поэтому, когда малая ось сжимающегося к отрезку эллипса станет меньше этого радиуса, орбита пересечёт Землю, и псевдолуна упадёт, хотя её среднее вдоль кеплеровой орбиты расстояние до Земли и останется прежним (рис. 17).

Чтобы закончить грустную историю экспериментальной математики счастливым концом, я опишу теперь некоторые малоизвестные математические результаты А. Д. Сахарова. Он учился в юности математике у моего отца (это подробно описано в «Воспоминаниях» А. Д. и привело его к постоянному интересу к математике, а также к ряду математических открытий и гипотез).

О своих математических результатах Сахаров рассказал мне немного, но после его смерти его коллеги передали мне для комментирова-



**Рис. 17.** Лидовское описание падения псевдолуны на Землю (примерно за 4 года)



**Рис. 18.** Разрезание Сахарова капустного слоя одиннадцатью разрезами на 42 выпуклых куска, имеющие 165 углов

ния его математические рукописи, и я с удовольствием прочитал его интересные описания своих математических работ.

Открытие, о котором я расскажу здесь, было чисто экспериментальным. Жена попросила Андрея Дмитриевича осенью нашинковать несколько капустных кочанов. Технология шинкования такова: сначала кочан делится на горизонтальные слои параллельными разрезами, а потом каждый такой слой рубится на мелкие выпуклые кусочки случайными ударами ножа (рис. 18).

Выполняя эту механическую работу, Сахаров не мог прекратить свои размышления. Он заметил, что получающиеся выпуклые многоугольники различны: некоторые из них — треугольники, но встречались и четырёхугольники, и пятиугольники, и т. д. Он стал считать, сколько встречается тех и других, и пришёл к заключению: среднее число сторон кусочка оказалось равным четырём!

Другое его наблюдение касалось форм кусочков. Оказалось, что (безразмерное) отношение средней площади кусочка к квадрату сред-

него периметра кусочка такое же, как если бы кусочки были кругами ( $\pi r^2 / (2\pi r)^2 = 1 / (4\pi)$ ).

Это кажется противоречащим изометрическому неравенству, утверждающему, что для круга отношение площади к квадрату периметра больше, чем для любой другой плоской фигуры. Но Сахаров догадался, что противоречия тут никакого нет: ведь средняя площадь и средний периметр достигаются на различных кусочках разбиения!

Продумывая гипотезу Сахарова о в среднем равном 4 числе сторон кусочка, моя итальянская ученица Ф. Аикарди доказала эту гипотезу вместе с её многомерным обобщением.

Рассмотрим выпуклые многогранники в евклидовом пространстве какой-либо размерности, получая их из какого-либо тела разрезанием многими ( $N$ ) случайно выбранными гиперплоскостями. Вычислим среднее число вершин частей, а также среднее число рёбер и граней любой размерности  $k$ .

Теорема состоит в том, что предел каждого из этих средних при  $N \rightarrow \infty$  равен числу граней размерности  $k$  у куба, разрезаемого гиперплоскостями евклидова пространства.

Например, в обычном трёхмерном пространстве среднее число вершин трёхмерного кусочка равно 8, среднее число рёбер равно 12, а среднее число граней равно 6 (хотя отдельные кусочки вовсе не похожи на параллелепипеды и имеют разные числа вершин, рёбер и граней).

Странным образом, мои друзья позже обнаружили, что эти открытия Сахарова и Аикарди не новы. А именно, Л. Шлефли обнаружил те же факты в 1852 г.

Однако его открытие было столь удивительным для тогдашних математиков, что его оценили и опубликовали лишь через 50 лет. Его «Theorie der vielfachen Kontinuitat» входит сейчас в *Gesamelte Mathematische Abhandlung L. Schläfli*, Birkhauser, Basel, 1950 (нужное место — с. 209–212 в первом томе).

Высокомерные современники часто пренебрегают открытиями экспериментальной математики, но в конце концов они всегда находят своё место в сокровищнице науки.

В своей книге «Могут ли машины мыслить» А. Тьюринг подчёркивал, что новые математические открытия получаются вовсе не при логическом последовательном выводе новых следствий из предыдущих познаний, а скорее зависят от неожиданных скачков идей, вызванных оригинальными экспериментами.

Закон тяготения Ньютона был открыт Гуком, который экспериментально исследовал орбиты маленьких шариков, катающихся вдоль раз-



личных гладких поверхностей, имитирующих разные законы притяжения. Он обнаружил в этих экспериментах, что замкнутые орбиты получаются именно в случае силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до притягивающего центра. Этот закон обратных квадратов уже обсуждался до того Кеплером; он был также известен древним халдеям в Вавилоне вместе с выводом эллиптичности орбит. Ньютон позже писал, что ему принадлежит честь восстановить для современного человечества эти древние доказательства, сгоревшие при пожаре Александрийской библиотеки, хранившей всю египетскую науку.

Лемма Стокса, основная в теории когомологий, была изобретена лордом Кельвином (Thompson), работавшим при этом над электромагнитными экспериментами.

Имя Стокса дал этой теореме Максвелл, который, будучи студентом Тринити-Колледжа в Кэмбридже, получил это утверждение в качестве задачи на экзамене «Трайпос». Он спросил затем экзаменаторов, кто предложил такую замечательную задачу. Оказалось, что профессор Стокс, от которого для Трайпоса срочно требовали задачу, никакой задачи не придумал, а потому отдал организаторам экзамена лежавшее у него на столе письмо Кельвина, описывающее его новый результат.

Максвелл основал на этой лемме всю свою теорию электромагнитного поля. Общество и государства никогда не могли расплатиться с учёными и с наукой за эти великие открытия, которые образуют основу всей современной цивилизации, но которые начинались с экспериментирования с янтарём и кошачьей шерстью.

Современная топологическая «теория Морса» (составляющая сегодня основу недавних достижений квантовой теории поля) началась с замечаний А. Кэли (опубликованных около 1860 г. в «Литературных добавлениях» к газете «Таймс»), описывающих сложные конфигурации горизонталей на географических картах горных районов.

Эти конфигурации обладают удивительными топологическими свойствами начиная с «теоремы Эйлера» (доказанной до Эйлера Декартом), утверждающей, что сумма чисел вершин и граней выпуклого ограниченного многогранника на 2 превосходит число его рёбер:

$$8 + 6 = 2 + 12 \quad \text{для куба (гексаэдра),}$$

$$4 + 4 = 2 + 6 \quad \text{для тетраэдра,}$$

$$20 + 12 = 2 + 30 \quad \text{для додекаэдра.}$$

Из этой теоремы следует, что сумма чисел вершин и котловин на острове превосходит число перевалов на нём на единицу, и Кэли

предложил экспериментально исследовать эту географическую топологию (позже перенесённую Пуанкаре на многомерные многообразия).

Интересно отметить, что эксперименталист Кэли исследовал почти в то же время топологическую сторону того, что теперь называется «теорией катастроф». В том числе он открыл все «семь элементарных катастроф Тома» в своём экспериментальном исследовании каустик (где он изучил огибающие семейств нормалей к эллипсоидам и поверхность их центров главных кривизн), а также волновых фронтов (например, он исследовал семейство эквидистантных поверхностей эллипсоидов, являющихся мгновенными фронтами возмущений, распространяющихся от поверхности эллипсоида в ограниченную им область). Эти открытия экспериментального математика связываются сегодня с классификацией простых комплексных алгебр Ли. Но первопроходцем, сделавшим возможной эту глубокую современную математическую теорию, был экспериментатор Кэли, не подозревавший о связи изученных им алгебраических поверхностей с алгебрами Ли.

## Приложение (от издательства)

Математические заметки А. Д. Сахарова, о которых написано на с. 55–56, опубликованы в книге: *Академик А. Д. Сахаров*. Научные труды. М.: Издательство ЦентрКом, 1995.

Они приведены в разделе «Любительские и учебные задачи А. Д. Сахарова». Ниже приводятся задачи по математике из этого раздела. (См. также журнал «Квант», 1995, № 5, с. 11–12.)

5\*. При рубке капусты сечкой получают многоугольники с разным числом вершин и разного размера и формы. Определить среднее число вершин  $\bar{n}$  и отношение квадрата среднего периметра  $\bar{L}$  к средней площади  $\bar{S}$ .

6\*. Дано  $N$  точек на плоскости. Каждая точка соединяется цветной линией с каждой из остальных  $N - 1$  точек, используется  $p$  цветов. Найти такую функцию  $L(n, p)$ , что:

- 1) при  $N > L(n, p)$  и при любом выборе цветов для  $N(N - 1)/2$  линий найдётся по крайней мере  $n$  таких точек, что все  $n(n - 1)/2$  соединяющих их линий одного цвета;
- 2) при  $N < L(n, p)$  можно так выбрать цвета линий, что никакие  $n$  точек не соединены линиями одного цвета.

**8\***. Сформулированы два семейства теорем, относящихся к теории чисел.

1. Последовательности

$$a_n = n! + 1, \quad a_n = [n \cdot \ln \ln n]! + 1$$

и т. д. (здесь [ ] означает целую часть) содержат бесконечное число простых чисел, так как ряд  $\sum \frac{1}{\ln a_n}$  расходится.

2. Последовательности

$$b_n = (n^2)! + 1, \quad b_n = [n(\ln n)^\alpha]! + 1, \quad \alpha > 0,$$

и т. д., для которых  $\sum \frac{1}{\ln b_n}$  сходятся, содержат конечное число простых чисел.

Дать оценку числа простых чисел  $S(n)$ , содержащихся в первых  $n$  членах последовательности  $n! + 1$ .

**9\***. На основании тождества

$$\sqrt{\frac{a_0^2 - 1}{b_0^2}} = \lim \frac{a_n}{b_n}, \quad a_n = 2a_{n-1}^2 - 1, \quad b_n = 2a_{n-1}b_{n-1},$$

построить быстро сходящийся алгоритм вычисления корней квадратных из всех целых и рациональных чисел и алгоритм вычисления членов ряда Фибоначчи  $f_{2n}$ ,  $f_{2n+1}$ , если известны члены  $f_n$ ,  $f_{n+1}$ , без вычисления всех промежуточных членов.

**13\***. Рассмотрим последовательность Фибоначчи с законом построения  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$  и начальными членами  $a_1 = a_2 = 1$ . Доказать, что среди чисел  $a_n$  есть кратные любого целого числа  $m$ . Показать, что при изменении начальных чисел  $a_1$ ,  $a_2$  это утверждение не обязательно справедливо.

**14\***. Двое играют в «бой яиц». Перед ними стоит корзина с яйцами. Они наугад берут по яйцу и ударяют их носами. Разбитое яйцо выбрасывается, и побеждённый берёт новое, а победитель раунда сохраняет своё яйцо для следующего раунда (предполагается, что победившее яйцо сохранило свою прочность и что исход каждого раунда зависит только от относительного качества яиц). Спрашивается: какова вероятность победы в  $n + 1$  раунде после победы в  $n$  предыдущих?

Ответ:  $1 - \frac{1}{n+2}$ .

**15\***. Задача о калошах (восстановлена И. Ф. Гинзбургом).

По словам людей, работавших с А. Д. Сахаровым, он любил задачи, которые можно было поставить на основе простых жизненных наблюдений. Вот одна из них.

А. Д. имел обыкновение пользоваться калошами. В пятидесятые годы он жил на два дома, регулярно летая из Москвы на объект (на котором он тогда работал), и у него было три пары калош. Направляясь на самолёт, А. Д. надевал калоши в двух случаях — если шёл дождь или если в пункте назначения калош не было. Через некоторое время он обнаружил, что вероятность посадки в самолёт в калошах составляет 20 %. Какова вероятность дождя  $p$ ?

Ответ:  $p = \frac{1}{7}$ .

### Чёрная кошка перебегает дорогу человеку

На плоскости расположены чёрная кошка и человек. Человек может перемещаться со скоростью 1, а кошка — со скоростью  $1 + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Сможет ли кошка двигаться так, чтобы через некоторое время «окружить» человека, иными словами, сможет ли она замкнуть свою траекторию таким образом, чтобы человек оказался внутри куска плоскости, ограниченного этой замкнутой траекторией кошки? Человек суеверен и ни в коем случае не желает пересекать траекторию кошки. Однако кошка может по своему желанию пересекать как след человека, так и собственный след.

## Часть II

### **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКТОВ**

---

# Предисловие

Не достигнув желаемого, они делали вид, что желали достигнутого.

*М. Монтень*

В этом курсе лекций я расскажу о нескольких новых направлениях математических исследований. Все они основаны на численных экспериментах. Рассматривая примеры, вроде  $5 \cdot 5 = 25$  и  $6 \cdot 6 = 36$ , мы догадываемся о гипотезах, вроде  $7 \cdot 7 = 47$ , а дальнейшие эксперименты либо подтверждают их, либо опровергают.

Например, гипотеза Ферма (о неразрешимости при целом  $n > 2$  уравнения в натуральных числах  $x^n + y^n = z^n$ ) была подмечена им при попытках найти решения. Эта гипотеза привела к созданию целой науки, но доказана она была только сотни лет спустя.

Большая часть гипотез, к которым мы придём, пока не доказана (и не опровергнута). Я решил читать эти лекции именно потому, что надеюсь на участие слушателей в исследовании этих вопросов, хотя бы в проведении численных экспериментов (которые сам я провёл без компьютера в ограниченной области чисел первого миллиона).

## Лекция 1

# Статистика топологии и алгебры

Я никогда не слышал о таком математике: он ведь физик.

*Ландау о Пуанкаре*

Главное не Шекспир, а примечания к нему.

*А. П. Чехов со слов  
Б. Л. Пастернака*

Крупнейший математик Нового времени Пуанкаре делил все проблемы на два класса: бинарные и интересные. Бинарная проблема — это проблема, допускающая ответ «да» или «нет» (как, например, вопрос Ферма).

А интересные проблемы — это те, в которых ответ «да» или «нет» недостаточен, в них нужно исследовать какой-либо вопрос, двигаясь вперёд. Например, Пуанкаре интересовался, как можно изменить условия задачи (скажем, краевые условия для дифференциального уравнения), сохраняя существование и единственность решения, или как меняется число решений при других изменениях. Так он создал теорию бифуркаций.

За три года до проблем Гильберта Пуанкаре сформулировал основные, по его мнению, математические проблемы, которые девятнадцатый век оставляет двадцатому. Это — создание математической базы квантовой и релятивистской физики.

Сегодня некоторые думают, что тогда, в 1897 году, релятивистской физики ещё не было, так как Эйнштейн опубликовал свою теорию относительности в 1905 году. Но Пуанкаре сформулировал принцип относительности уже в своей статье 1895 года «Об измерении времени», которую Эйнштейн и использовал (о чём он, впрочем, не писал до 1945 года). Точно так же при создании квантовой механики

Шрёдингеру удалось добиться успеха только за счёт использования предшествовавших математических работ Германа Вейля, о которых впоследствии никто не упоминает, хотя Шрёдингер на них и сослался (в своей первой книге).

## § 1. Шестнадцатая проблема Гильберта

Хотя я в основном соглашаюсь с Пуанкаре, сегодня я буду говорить о бинарной (или почти бинарной, почему я о ней и буду говорить) проблеме Гильберта, имеющей в его списке номер 16.

Задача эта гораздо старше Гильберта — это вообще один из основных вопросов всей математической науки (и многих её приложений).

Приведём простейший пример: для алгебраического многочлена  $f$  от двух переменных  $x$  и  $y$  рассмотрим кривую, где он обращается в нуль:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}.$$

Вопрос состоит в том, как может быть устроена топологически эта кривая, если  $f$  — многочлен фиксированной степени  $n$ .

Например, если  $n = 2$ , то согласно древней теории конических сечений кривая — либо эллипс, либо гипербола, либо парабола, либо пара прямых (быть может, сливающихся), либо вся плоскость (если многочлен — тождественный нуль).

Добавляя к плоскости бесконечно удалённые точки, мы превращаем её в проективную плоскость, от чего задача становится проще (эллипс, гипербола и парабола на проективной плоскости устроены одинаково, различие — только в расположении этой «окружности» по отношению к бесконечно удалённой прямой, см. рис. 1).

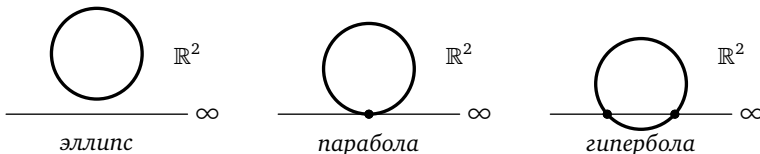


Рис. 1. Конические сечения на проективной плоскости

Для  $n > 2$  вопрос более труден, но Декарт и Ньютон разобрали случаи  $n = 3$  и  $n = 4$ . Гильберт утверждал, что он исследовал кривые степени  $n = 6$ , но его результат (доказательство которого он никогда не опубликовал) был ошибочным.



Кривая степени  $n$  состоит, согласно теореме Харнака, из не более чем

$$g + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$

связных компонент (где  $g$  — род соответствующей римановой поверхности, образованной комплексными решениями уравнения кривой в комплексной проективной плоскости  $\mathbb{C}P^2$ ). Всякая замкнутая связная ориентируемая поверхность (согласно основной теореме топологии) представляет собой поверхность рода  $g$ , где  $g$  — число ручек, которые надо добавить к сфере, чтобы получить эту поверхность (см. рис. 2).

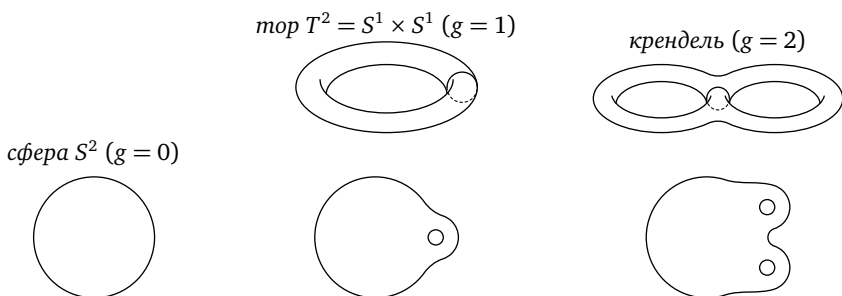


Рис. 2. Поверхности рода 0, рода 1 и рода 2

При  $n = 6$  мы находим род римановой поверхности  $g = 10$ , так что вещественная кривая степени 6 имеет не более 11 компонент (называемых «овалами» и похожих на окружности, во всяком случае диффеоморфных окружности  $S^1$ ).

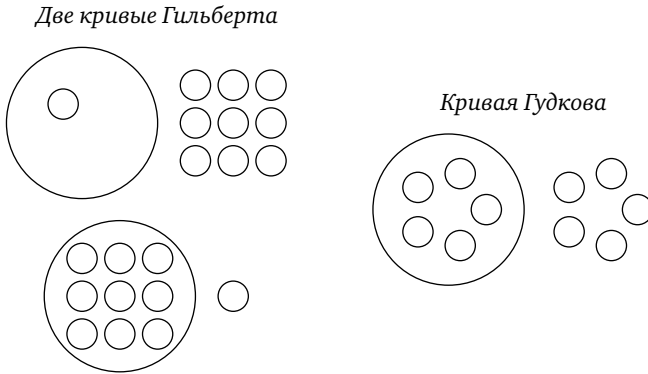
Гильберт утверждает, что эти 11 овалов могут быть расположены на (проективной) плоскости  $\mathbb{R}P^2$  *только двумя способами*.

Каждый овал ограничивает «диск», диффеоморфный кругу (дополнение в  $\mathbb{R}P^2$  к этому диску составляет лист Мёбиуса, из-за этого Мёбиусом и открытый).

Гильберт утверждал, что только один из этих дисков содержит внутри себя другие овалы и что число этих внутренних овалов может принимать *только два значения*: 1 и 9 (рис. 3).

Ошибка Гильберта состояла в том, что число внутренних овалов может равняться ещё и пяти (это открыл нижегородский математик Дмитрий Андреевич Гудков около 1970 года).

Для кривых степени 8 вопрос Гильберта не решён и сегодня: 22 овала кривой степени 8 могли бы располагаться на плоскости миллиардами различных способов, но найденные сегодня ограничения уменьшают



**Рис. 3.** Алгебраические кривые степени 6 с 11 овалами

число топологически разных расположений кривых, и этих случаев остаётся менее 90. Число же построенных примеров, хотя и превосходит 70, пока ещё не столь велико, как число допускаемых наукой возможностей.

Интересно, что, хотя вопрос и кажется относящимся к вычислительной математике, компьютеры до сих пор не внесли почти никакого вклада в его решение.

Если коэффициенты многочлена известны, то компьютер способен нарисовать расположение овалов соответствующей кривой. Но перечисление *всех* встречающихся возможностей (при всевозможных значениях коэффициентов) — гораздо более трудная задача.

Она тоже алгоритмически разрешима (в смысле математической логики), можно даже, в принципе, найти число связных областей, на которые делит пространство многочленов степени  $n$  бифуркационная диаграмма, вблизи которой тип кривой меняется. Но необходимые для этого вычисления столь велики, что никакой прогресс вычислительной техники не позволяет надеяться на компьютерное решение задачи о многочленах степени 8 в обозримое время.

Несколько отвлекаясь от темы сегодняшней лекции, я расскажу о единственном мне известном (и очень недавнем) успехе компьютерной техники в близкой задаче. [support@p2p.bz](mailto:support@p2p.bz)

Рассмотрим график вещественного многочлена степени  $n$  от двух переменных как поверхность  $z = f(x, y)$  в трёхмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

Около некоторых своих точек эта поверхность локально выпуклая (такие точки называются *эллиптическими*), около других — локально седловая (такие точки называются *гиперболическими*, см. рис. 4).

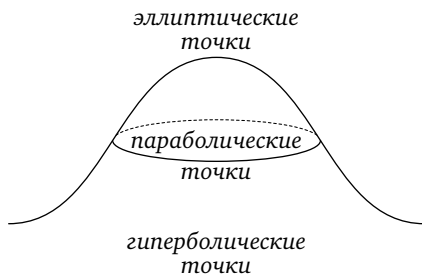


Рис. 4. Параболическая кривая на гладкой поверхности

Эллиптические и гиперболические точки поверхности разделяются линией *параболических точек*.

В терминах частных производных функции  $f$  кривая параболических точек задаётся уравнением

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. условием  $f_{xx}f_{yy} = (f_{xy})^2$  обращения в нуль гессиана функции  $f$ .

Пусть  $f$  — многочлен степени  $n$ . Спрашивается, *из скольких замкнутых кривых (овалов) может состоять его параболическая кривая?*

Для многочлена  $f$  степени 4 гессиан тоже многочлен степени 4, поэтому по теореме Харнака число овалов не превосходит  $g + 1 = 4$ .

Многочлен  $f$  степени 4, доставляющий параболическую кривую, состоящую из трёх овалов, построить нетрудно (предоставляю это слушателям в виде задачи).

А вот вопрос о том, может ли параболическая кривая многочлена степени 4 состоять из четырёх овалов, оказался очень трудным.

Его решила в Мексике в 2005 году Адриана Ортиц-Родригес, защитившая перед этим в Париже, как моя ученица, диссертацию (где для многочленов степени  $n$  число овалов параболической кривой оценивалось сверху числом  $an^2$ , а снизу числом  $bn^2$ , причём  $a > b$ ).

Когда она была ещё студенткой (в университете Париж-Жювьё), то, придя ко мне на семинар, попросила себе задачу. Я сказал, что, чтобы понимать мои задачи, надо решить сперва письменно 100 задач статьи «Математический Тривиум» (Успехи мат. наук. 1991. Т. 46, № 1. С. 225–232; см. также Арнольд В. И. Задачи. М.: МЦНМО, 2017). Московские хорошие студенты решают их все за 3 часа.

Адриана принесла мне решения этих задач, но они все оказались неверными. Она попросила неделю на раздумье и через неделю принесла 10 верно решённых задач. Через 10 недель она решила их все сто и начала разбираться в математике.

Но когда я хотел сформулировать ей научную задачу для самостоятельных размышлений, то Адриана сказала: «Нет, теперь я сама придумала себе задачу в стиле вашего семинара и работ ваших учеников о лагранжевых особенностях в симплектической геометрии», — и сформулировала обсуждавшийся выше вопрос о параболических кривых.

Я ответил, что убедился теперь, что и в Мексике учат математике так же плохо, как и в Париже (где, как я довольно хорошо знал, весьма низок уровень знаний студентов).

Неспособность решать задачи тривиума была у Адрианы следствием именно плохого обучения основам математики, которому она подверглась и в Мехико, и в Париже. Ведь и с сообразительностью, и с математическими способностями у неё всё было в порядке (как показал её дальнейший опыт и с «тривиумом», и с параболическими кривыми): после того как я всему её обучил своей сотней задач, она стала отличным математиком.

Вопрос о росте числа овалов параболической кривой для многочлена степени  $n$  (о сближении постоянных  $a$  и  $b$  в асимптотических оценках  $an^2$  и  $bn^2$  сверху и снизу) остаётся открытым и сегодня (поэтому я включил его в эту лекцию, надеясь, что и здесь найду талантливых учеников).

Что же касается исходного случая  $n = 4$ , то защитившая в Париже диссертацию Адриана, став профессором в Мехико, получила неограниченное компьютерное время. За год непрерывной работы ЦПУ её компьютер рассмотрел 50 миллионов многочленов  $f(x, y)$  степени 4. У трёх из них оказалось по четыре овала в параболической кривой у каждого.

Когда коэффициенты многочлена известны, проверка того, сколько у него овалов в параболической кривой, занимает, даже без компьютера, считанные минуты, так что из окончательных теорем компьютерный эксперимент можно было бы и выбросить.

Но *найти* эти замечательные многочлены без компьютера никак не удавалось, так что вклад этого компьютерного эксперимента в трудное решение описываемой задачи оказался решающим.

Я надеюсь, что и в обсуждаемых ниже задачах мои слушатели сумеют добиться аналогичных успехов.

*Замечание.* Прежде чем двигаться дальше, я объясню несколько (использованных выше) вещей, тщательно скрываемых от обучающихся при традиционном псевдонаучном изложении математики.

*Определитель* («det») матрицы второго порядка  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  — это *площадь параллелограмма*, построенного на вектор-столбцах  $(a, c)$  и  $(b, d)$  (см. рис. 5), считаемая со знаком плюс, если векторы ориентируют плоскость так же, как первый и второй координатные орты (и со знаком минус в противном случае).

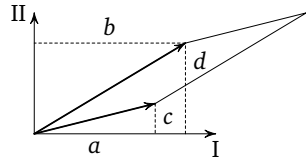


Рис. 5. Ориентированный положительно параллелограмм

Две пары линейно независимых векторов на плоскости *ориентируют её одинаково*, если их можно соединить непрерывным путём в пространстве упорядоченных пар линейно независимых векторов плоскости.

*Разных ориентаций* (классов эквивалентности упорядоченных пар векторов на плоскости, упорядоченных реперов из  $n$  линейно независимых векторов в  $\mathbb{R}^n$ ) *ровно две* (при любом  $n$ ). Этот важнейший естественно-научный факт (который только один и объясняет странное правило: «минус на минус даёт плюс») обычно скрывают от обучающихся, заменяя всю эту геометрию постулируемой формулой

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

являющейся на самом деле лёгким *следствием* из приведённых выше топологических фактов (полезно ещё отметить *линейную* зависимость определителя от каждого вектор-столбца и его кососимметричность: смену знака при перестановке двух столбцов).

Вторые производные многочлена (или иной гладкой функции)  $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$  в точке образуют матрицу (порядка  $t$  для функций от  $t$  переменных).

Определитель этой *матрицы Гессе* функции  $f$  называется *гессианом* функции  $f$ . Полезно заметить, что знак гессиана функции  $f$  совпадает со знаком гауссовой кривизны графика функции  $f$  (и, между прочим, не зависит от выбора ориентации пространства, где функция определена). Я не останавливаюсь на этом замечании, потому что оно понятно только тем, кто знаком с гауссовой кривизной, — а знакомые с ней легко докажут сделанные выше утверждения о связи гессиана с гауссовой кривизной графика.

Ещё одно замечание — о роде  $g$  римановой поверхности алгебраической кривой степени  $n$ . Мы использовали выше «формулу Римана — Гурвица»

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Например, кривые степени  $n=1$  (прямая) и  $n=2$  (окружность) имеют род  $g=0$ , т. е. вещественно диффеоморфны сфере  $S^2$  (называемой также сферой Римана  $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  или комплексной проективной прямой  $\mathbb{C}P^1$ ).

Для прямой это ясно, а для окружности следует из её рациональной параметризации «тангенсом половинного угла»  $t = \operatorname{tg} \beta = y/(1+x)$ :

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{при } x^2 + y^2 = 1. \quad (1)$$

Полезная задача — постараться понять топологическое строение «комплексной сферы», заданной в проективном пространстве,  $\mathbb{C}P^3$  аффинным уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Ответ: это четырёхмерное многообразие диффеоморфно прямому произведению двух обычных сфер,  $S^2 \times S^2$ .

Выписанные формулы (1) (доставляющие также «египетские прямоугольные треугольники»,  $3^2 + 4^2 = 5^2$ ,  $5^2 + 12^2 = 13^2$  и т. п., а именно  $a^2 + b^2 = c^2$  для  $x = a/c$ ,  $y = b/c$ , где, согласно формуле (1) при  $t = u/v$ ,  $a = v^2 - u^2$ ,  $b = 2uv$ ,  $c = u^2 + v^2$ ) определяют диффеоморфизм комплексной окружности сфере  $S^2$ .

Формулы (1) выводятся так (рис. 6). Проведём через точку плоскости  $(x = -1, y = 0)$  прямую  $\{y = t(x + 1)\}$ . Подставляя это значение  $y$  в уравнение окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , мы получим для абсциссы  $x$  точки пересечения прямой с окружностью квадратное уравнение, один корень которого ( $x = -1$ ) нам известен.

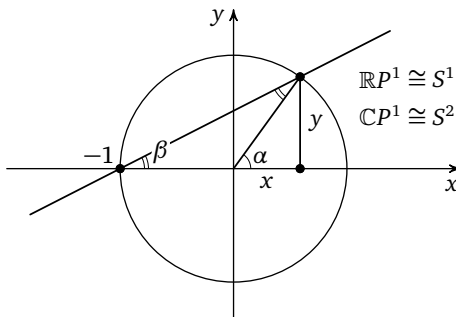


Рис. 6. Рациональная параметризация окружности

Для второго корня теорема Виета доставляет рациональное выражение через  $t$ , откуда и получается первая (а затем и вторая) формула параметризации (1).

Вместо этой алгебры можно было бы воспользоваться геометрическим тождеством  $\alpha = 2\beta$  теоремы о внешнем угле (равнобедренного треугольника), ведь  $x = \cos \alpha$ ,  $y = \sin \alpha$ ,  $t = \operatorname{tg} \beta$ .

Для знакомых с анализом слушателей отмечу ещё, что из той же рациональной параметризации окружности следует явная вычислимость (в элементарных функциях) всех абелевых интегралов вдоль окружности:

$$I = \int_{x^2+y^2=1} R(x, y) dx,$$

где  $R$  — рациональная функция.

Действительно, рациональная параметризация (1) сводит вычисление интеграла  $I$  к интегрированию рациональной функции параметра  $t$ ,

$$I = \int r(t) dt.$$

Абель доказал, что такое элементарное интегрирование становится (для подходящей дроби  $R$ ) невозможным, если вместо окружности абелев интеграл  $I$  берётся вдоль кривой высшего рода ( $g > 1$ ). Например, это так уже для эллиптических интегралов (вдоль кривой  $y^2/2 + U(x) = 0$ , где  $U$  — многочлен степени 3, хотя бы  $U(x) = x^3 + ax + b$ ).

Доказательство этой топологической теоремы Абеля тоже замечательное упражнение.

Топологической она является потому, что не представима конечной комбинацией элементарных функций не только функция<sup>1</sup>

$$t(X) = \int^X \frac{dx}{y}, \quad \text{где } \frac{y^2}{2} + U(x) = 0,$$

но и никакая топологически эквивалентная (многозначной) комплексной функции  $t$  функция, причём эта непредставимость имеет место и для обратных функций, эквивалентных «эллиптической функции»  $X(t)$  (для невырожденных значений коэффициентов  $a$  и  $b$ ).

<sup>1</sup> Выражающая время  $t$  движения до точки  $X$  под действием уравнения Ньютона,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx}.$$

Формула Римана — Гурвица ( $g = (n - 1)(n - 2)/2$  для гладкой кривой степени  $n$ ) проще всего доказывается следующим «итальянским» рассуждением.

Рассмотрим какое-нибудь естественное семейство алгебро-геометрических комплексных объектов (например, семейство многочленов степени  $n$  от одной переменной, или семейство многочленов данной степени от двух переменных, задающих алгебраические кривые, или соответствующее семейство однородных многочленов фиксированной степени от трёх переменных, задающих алгебраические кривые в комплексной проективной плоскости  $\mathbb{C}P^2$ ).

«Итальянское» соображение состоит в том, что *все невырожденные объекты в семействе топологически одинаковы* (например, все многочлены степени  $n$  без кратных корней имеют одинаковое число корней в случае многочленов от одной переменной, все гладкие алгебраические кривые степени  $n$  в  $\mathbb{C}P^2$  имеют одинаковый род  $g(n)$ , не зависящий от выбора конкретной кривой).

Доказательство этого соображения — топологическое. Дело в том, что вырожденность комплексного объекта задаётся комплексным уравнением (дискриминант равен нулю в случае многочленов от одной переменной и т. п.). А это комплексное условие на комплексные коэффициенты, выбор которых задаёт объект семейства, представляет собой *два вещественных независимых уравнения* (в ноль должны обращаться и вещественная, и мнимая части дискриминанта).

Поэтому *алгебраическое многообразие всех вырожденных объектов имеет вещественную коразмерность два* (в рассматриваемом семействе многочленов и т. п.). Но подмногообразие вещественной коразмерности два не делит на части гладкое многообразие всех объектов семейства (как точка не делит плоскость, а прямая или кривая не делит на части трёхмерное пространство).

Поэтому многообразии невырожденных объектов связно. А отсюда следует одинаковость топологического типа всех этих невырожденных объектов, так как при движении вдоль кривой в пространстве невырожденных объектов (например, многочленов без кратных корней) топологическая структура объекта (число корней уравнения в предыдущем примере) не меняется (по теореме о неявной функции).

Доказанный принцип показывает, что *для вычисления топологических характеристик всех невырожденных объектов комплексного семейства достаточно рассмотреть один пример и вычислить эти характеристики для него: для остальных невырожденных объектов характеристики будут такими же*.



Например, в качестве многочлена степени  $n$  достаточно взять многочлен

$$f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

который, очевидно, имеет ровно  $n$  корней  $x = 1, 2, \dots, n$  (кратности 1).

Согласно «итальянскому принципу» из этого следует «основная теорема алгебры»: *всякий многочлен степени  $n$  от одной переменной, не имеющий кратных корней, имеет ровно  $n$  комплексных корней.*

В случае плоских алгебраических кривых достаточно найти род одной (неособой) кривой степени  $n$ .

Начнём топологическое исследование с особой кривой степени  $n$ , распадающейся на  $n$  прямых, пересекающихся попарно в  $n(n-1)/2$  различных точках (рис. 7).

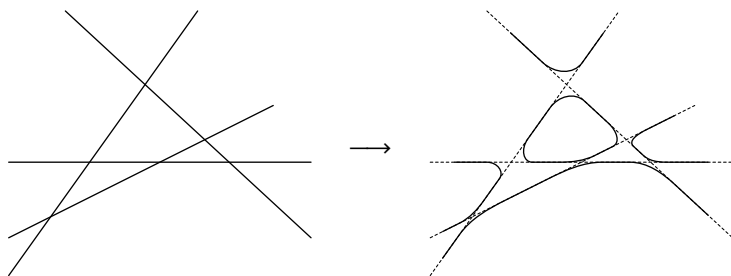


Рис. 7. Деформация распадающейся кривой степени  $n$

Если уравнение этой кривой имеет вид  $f_0 = 0$ , где  $f_0$  — произведение  $n$  линейных неоднородных функций  $a_jx + b_jy + c_j$ , то уравнение  $f_\varepsilon = 0$  (где  $f_\varepsilon = f_0 - \varepsilon$ ) задаёт при малых  $\varepsilon \neq 0$  гладкую кривую степени  $n$ , род которой мы и будем теперь вычислять.

Это вычисление проводится так. Кривая  $f_0 = 0$  состоит из  $n$  сфер  $S_j^2$ , пересекающихся попарно в  $n(n-1)/2$  различных точках. При малом  $\varepsilon$  переход к кривой  $f_\varepsilon = 0$  означает замену креста, образованного двумя пересекающимися трансверсально гладкими сферами около их точки пересечения, на цилиндр, соединяющий дополнения к окрестностям точки пересечения на каждой из сфер (рис. 8).

Определим, сколько ручек получится после  $n(n-1)/2$  таких происходящих независимо перестроек (около всех точек пересечения).

Из  $n$  сфер  $S_1^2, \dots, S_n^2$  выберем одну —  $S_1^2$ . Каждая из её  $n-1$  точек пересечения с остальными сферами после перестройки соединяет каждую из этих остальных сфер с первой, так что все вместе они образуют опять диффеоморфную сфере поверхность  $\Sigma^2$ , не считая

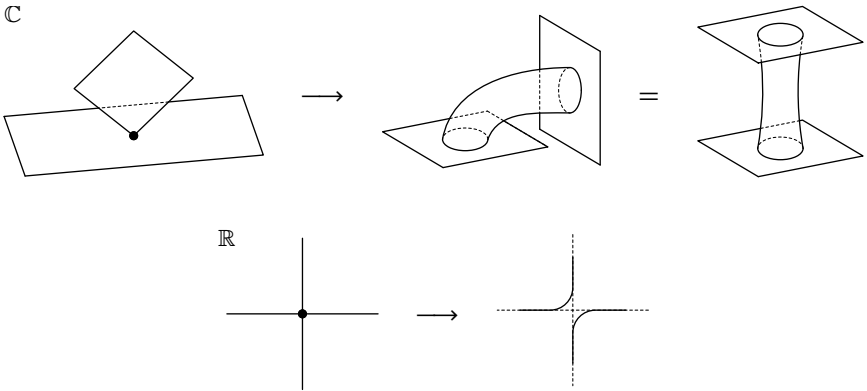


Рис. 8. Поведение двойной точки при деформации

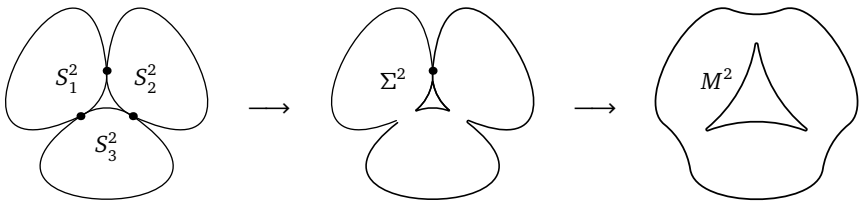


Рис. 9. Построение гладкой поверхности из набора  $n$  сфер

лишь оставшихся  $(n - 2) + (n - 3) + \dots + 1 = (n - 1)(n - 2)/2$  точек пересечения остальных сфер между собой (рис. 9).

После замены  $(n - 1)(n - 2)/2$  точек пересечения поверхности  $\Sigma^2$  с собой таким же числом трубочек мы превратим «сферу»  $\Sigma^2$  в (гладкую) поверхность  $M^2$  сферы с ручками, число ручек  $g$  — это число трубочек, заменивших точки самопересечения «сферы»  $\Sigma^2$ , так что  $g = (n - 1)(n - 2)/2$ .

На рис. 9 (соответствующем  $n = 3$ ) получается  $g = 1$ , так что поверхность  $M^2$  рода 1 представляет собой тор.

Так мы получили формулу Римана — Гурвица  $g = (n - 1)(n - 2)/2$ .

Неравенство Харнака, утверждающее, что вещественная кривая рода  $g$  имеет не больше  $g + 1$  овала, является частным случаем неравенства Смита

$$\sum b_k(M_{\mathbb{R}}) \leq \sum b_k(M_{\mathbb{C}}). \tag{2}$$

Здесь  $M_{\mathbb{C}}$  — комплексное алгебраическое многообразие (например, риманова поверхность кривой). Если это многообразие задаётся

уравнением с вещественными коэффициентами, то на нём действует симметрия («инволюция»)  $\sigma: M_{\mathbb{C}} \rightarrow M_{\mathbb{C}}$  комплексного сопряжения (переводящая точку с комплексными координатами  $z_j$  в точку с комплексными координатами  $\bar{z}_j = x_j - iy_j$  при  $z_j = x_j + iy_j$ ). Очевидно,  $\sigma^2 = 1$ , и вещественное многообразие  $M_{\mathbb{R}}$  состоит из неподвижных точек инволюции  $\sigma$  (овалов в случае кривой).

Числа  $b_k$  в неравенстве (2) — это «числа Бетти» для цепей с коэффициентами в группе  $\mathbb{Z}_2$  из двух элементов.

Для окружности числа Бетти имеют вид  $b_0 = b_1 = 1$ ,  $b_{k>1} = 0$ .

Для римановой поверхности рода  $g$  имеем

$$b_0 = b_2 = 1, \quad b_1 = 2g, \quad b_{k>2} = 0.$$

Здесь  $2g$  одномерных циклов — это «параллели» и «меридианы»  $g$  ручек.

Неравенство Смита имеет поэтому в случае кривых рода  $g$  вид

$$2 \text{ (число овалов)} \leq 2g + 2,$$

т. е. получается неравенство Харнака:

$$\text{число овалов} \leq g + 1.$$

Само неравенство Смита доказать не очень трудно, рассматривая действие инволюции  $\sigma$  на всевозможные цепи (симметричной относительно инволюции  $\sigma$  триангуляции многообразия). В случае римановой поверхности вещественной кривой наиболее важное соображение теории Смита состоит в том, что между её овалами может существовать *только одно* гомологическое соотношение (сумма овалов гомологична нулю) в одномерных гомологиях римановой поверхности, иначе эта поверхность не была бы связной, а распалась бы на связные двумерные компоненты (образованные частями вида  $a$  и  $\sigma a$ , где двумерная цепь  $a$  имеет границей левую часть соотношения между овалами).

К этим замечаниям из вещественной алгебраической геометрии добавлю ещё, что кроме графиков многочленов Адриана Ортиц-Родригес рассматривала в своей диссертации и параболические кривые на любых алгебраических поверхностях степени  $n$  в трёхмерном вещественном проективном пространстве  $\mathbb{R}P^3$ . В этом случае число параболических кривых оценено ею сверху и снизу величинами  $an^3$  и  $bn^3$ , причём постоянная  $a$  больше постоянной  $b$  примерно в 10 раз.

Я формулирую здесь этот результат потому, что надеюсь на слушателей, которые захотели бы найти точную скорость роста числа параболических кривых, сблизив  $a$  и  $b$ .

Результаты Гудкова о кривых степени 6 послужили основой замечательной новой теории, которая связала вещественную алгебраическую геометрию 16-й проблемы Гильберта с квантовой теорией поля и с многомерной топологией.

Числа внутренних овалов в списке Гудкова кривых 6-й степени с 11 овалами (1, 5 или 9) недаром идут через 4. Переходя от кривой  $f(x, y) = 0$  к ограниченной поверхности с краем  $M: f(x, y) \geq 0$ , мы приходим к следующим через 8 эйлеровым характеристикам.

Перебирая найденные в диссертации Гудкова вещественные проективные алгебраические кривые степени  $n = 2k$ , имеющие наибольшее возможное по теореме Харнака число овалов, я заметил, что для них эйлеровы характеристики поверхностей  $M$  удовлетворяют сравнениям

$$\chi(M) \equiv k^2 \pmod{8}, \quad (3)$$

которые я назвал «сравнениями Гудкова».

Сравнения по модулю 8 (для сигнатур форм пересечений) являются стандартными в топологии четырёхмерных замкнутых многообразий, поэтому я стал искать четырёхмерное многообразие в топологии (одномерных) вещественных алгебраических кривых.

Таким многообразием оказалась *комплексификация поверхности с краем  $M^2$* . Чтобы комплексифицировать поверхность, заданную неравенством  $f(x, y) \geq 0$ , я записал это геометрическое неравенство в алгебраическом виде  $f(x, y) = z^2$ . Эта формула определяет (в комплексной области) четырёхмерное в вещественном смысле многообразие: двулистное накрытие дополнения к римановой поверхности (комплексной кривой)  $f(x, y) = 0$  в  $\mathbb{C}P^2$ , разветвлённое вдоль этой римановой поверхности.

Применяя к этому четырёхмерному многообразию топологические результаты о делимости сигнатур на 8, я доказал сравнение (3) по модулю 4, а затем Рохлин, применив более глубокие результаты дифференциально-топологического исследования гладких четырёхмерных многообразий, доказал и само сравнение Гудкова (3).

Интересно, что сам Гудков, которому я сообщил об этом сравнении, когда писал отзыв на его диссертацию, считал его неверным, так как якобы располагал контрпримерами к нему (которые, однако, оказались столь же ошибочными, как и результат Гильберта о кривых степени 6, опровергавшийся этой диссертацией).

К настоящему времени сравнение (3) стало основой большого количества новых результатов и в вещественной алгебраической геометрии, и в дифференциальной топологии, и даже в квантовой тео-

рии поля. Но, к сожалению, даже для классификации топологических структур кривых степени 8 в 16-й проблеме Гильберта этих результатов не хватает.

Возвращаясь к 16-й проблеме, замечу, что Гильберт, по-моему, пропустил в этой задаче самые главные вопросы. Дело в том, что топологические структуры могут различаться не только у вещественных алгебраических кривых (данной степени)  $\{f(x, y) = 0\}$ , но и у многочленов  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , которыми эти кривые задаются.

Гильберту следовало бы включить в формулировку своей проблемы не только вопрос о топологической классификации проективных вещественных плоских алгебраических кривых данной степени, но и вопрос о *топологической классификации самих многочленов, задающих эти кривые*.

Этот вопрос не решён, насколько мне известно, уже для кривых степени  $n = 4$  (где кривые расклассифицировал ещё Декарт). Я обсужу теперь этот вопрос о топологической классификации гладких функций и многочленов, где многое до сих пор неизвестно (отчасти по вине Гильберта).

## § 2. Статистика гладких функций

Чтобы описать топологическую структуру гладкой вещественной функции, сопоставим ей граф, точками которого являются связные компоненты гиперповерхностей уровня этой функции.

Для невырожденной «функции Морса»  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n > 1$ , такой граф оказывается деревом, имеющим  $T$  тройных точек ветвления,  $K = T + 2$  конечных точек и  $P = 2T + 1$  рёбер, соединяющих  $K + T = 2T + 2$  вершины графа.

**Пример 1.** Для горы Эльбрус функция (высота) имеет две точки локального максимума  $A$  и  $B$  и одну седловую точку  $C$ , так что граф имеет вид буквы  $Y$  (рис. 10).

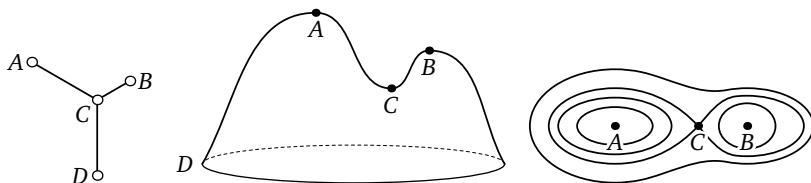


Рис. 10. Граф и линии уровня горы Эльбрус

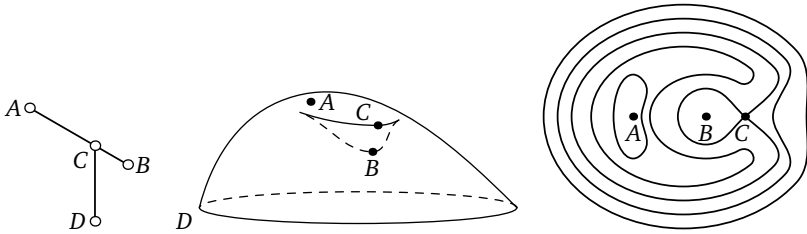


Рис. 11. Граф и линии уровня горы Везувий

Мы будем изучать функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ведущие себя как  $-r$  вдали от начала координат, продолжая их вблизи точки  $\infty = S^n \setminus \mathbb{R}^n$  так, чтобы она была точкой локального минимума (предоставленного выше концевой вершиной  $D$  дерева).

**Пример 2.** Для горы Везувий получаем картинку, изображённую на рис. 11.

В структуру графа функции мы будем включать упорядочение его вершин по высоте ( $f(A) > f(B) > f(C) > f(D)$  для Эльбруса,  $f(A) > > f(C) > f(B) > f(D)$  для Везувия), различая графы из примеров 1 и 2, хотя эти деревья и гомеоморфны.

Для простоты мы будем считать, что все  $2T + 2$  критических значения функции  $f$  различны. Для функций на сфере  $S^2$  из этих значений  $T$  соответствуют седлам, а  $T + 2$  — максимумам и минимумам. Графы функций Морса на сферах  $S^n$ ,  $n > 2$ , похожи на графы для  $n = 2$  и тоже являются деревьями, но мы применим позже развитую для изучения этих деревьев технику и к случаю функций на торе  $T^2 = S^1 \times S^1$ , где графы имеют циклы.

Нашей основной целью будет исследование статистики графов функций (с упорядоченными по высоте вершинами), имеющих  $T$  тройных точек: какие из этих упорядоченных деревьев реализуются многочленами соответствующей значению  $T$  степени?

Типичный многочлен степени  $n$  от двух переменных имеет не более  $(n - 1)^2$  критических точек на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , это соответствует значениям  $2T + 2 = (n - 1)^2 + 1$ , т. е.  $T = 2k(k - 1)$  тройных вершин графа (седел функции) для многочленов степени  $n = 2k$ .

**Теорема 1.** Числа  $\varphi(T)$  (упорядоченных) графов функций (деревьев с  $T$  тройными точками) при  $T \leq 4$  суть

$T$	1	2	3	4
$\varphi(T)$	2	19	428	17 746

Упорядочения графов функций обладают следующим свойством *правильности*: среди трёх соседей любой вершины ветвления есть и более высокие (1 или 2), и более низкие (2 или 1) вершины.

Это следует из того, что графы Эльбруса и Везувия (рис. 9 и рис. 10) упорядочены правильно, а топологическое строение функции около седловой критической точки всегда либо такое, как у Эльбруса, либо такое, как у Везувия.

Скорость роста числа  $\varphi(T)$  правильно упорядоченных графов с ростом числа седел  $T$  оценивают следующие два результата.

**Теорема 2.** Число  $\varphi(T)$  правильно упорядоченных деревьев (графов функций) с  $T$  тройными вершинами не меньше, чем следующая оценка снизу:

$$\varphi(T) \geq \frac{(T^2 + 5T + 5)(2T + 2)!}{(T + 4)!}.$$

При  $2 \leq T \leq 4$  правая часть этого неравенства имеет соответственно значения 19, 232, 3690. Оценка снизу скорости роста  $\varphi$  «по Стирлингу» даёт величину  $4(4/e)^T T^T > T^T$ .

**Теорема 3.** Число  $\varphi(T)$  правильно упорядоченных деревьев с  $T$  тройными вершинами не больше, чем следующая оценка сверху:

$$\varphi(T) \leq T^{2T}, \quad \text{если } T > 2.$$

Основу доказательства теоремы 2 составляет прямой подсчёт числа тех специальных упорядоченных деревьев, для которых  $T$  тройных точек составляют монотонную  $A$ -цепь с критическими значениями

$$f(A_1) > f(A_2) > \dots > f(A_T)$$

в соседних вершинах графа:  $A_1 - A_2 - \dots - A_T$ .

Здесь и всюду дальше мы будем считать функцию, граф которой мы изучаем, заданной и на этом графе: значение новой функции в каждой точке графа равно значению исходной функции в каждой точке той гиперповерхности уровня, компонентой связности которой эта точка графа является.

**Теорема 4.** Число правильных упорядочений графа — дерева с  $T$  тройными точками, образующими упорядоченную  $A$ -цепь, равно

$$\psi(T) = \frac{(T^2 + 5T + 5)(2T + 2)!}{(T + 4)!}.$$

Теорема 2 вытекает из теоремы 4, так как число  $\varphi(T)$  всех правильных упорядочений не меньше числа  $\psi(T)$  тех правильных упорядочений, в которых тройные точки образуют монотонную  $A$ -цепь.

*Замечание.* Некоторые из наших правильно упорядоченных графов являются графами *многочленов* (степени  $n = 2k$  при  $T = 2k(k - 1)$ ), а некоторые не являются.

Было бы интересно узнать, будет ли число реализуемых многочленами правильных упорядочений мало по сравнению с числом всех реализуемых гладкими функциями упорядочений, или, может быть, относительно малым окажется, напротив, число нереализуемых многочленами правильных упорядочений (асимптотически, при  $T \rightarrow \infty$ ).

Число топологически разных реализаций реализуемого графа также интересно. Здесь следовало бы рассмотреть и вопрос о классификации топологически разных реализующих гладких функций Морса, и вопрос о числе компонент связности в пространстве реализующих многочленов данной степени (которое может оказаться бóльшим единицы даже и в том случае, когда все эти реализующие многочлены топологически друг другу эквивалентны).

Оба вопроса открыты, и я ожидаю достижений от слушателей.

**Доказательство теоремы 4.** Обозначим через  $a$  ту конечную вершину, соседнюю с тройной вершиной  $A_1$  в графе, в которой критическое значение максимально,  $f(a) > f(A_1)$ .

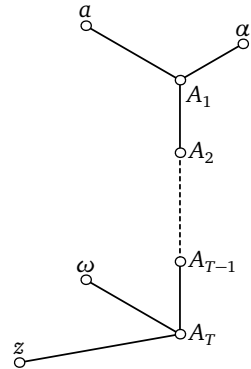
Точно так же обозначим через  $z$  ту конечную вершину, соседнюю с тройной вершиной  $A_T$  в графе, в которой критическое значение минимально,  $f(z) < f(A_T)$ .

Третью соседнюю конечную вершину тройной вершины  $A_1$  в графе мы обозначим (рис. 12) через  $\alpha$  (она отлична от  $a$  и от  $A_2$ ). Точно так же обозначим через  $\omega$  третью конечную вершину, соседнюю в графе с  $A_T$  (она отлична от  $z$  и от  $A_{T-1}$ ).

Чтобы классифицировать оснащения тройных вершин  $A_1, \dots, A_T$  графа присоединяемыми в них рёбрами, ведущими в конечные вершины графа, заметим прежде всего, что критическое значение  $f(\alpha)$  принадлежит дополнению к следующему множеству из  $T + 1$  вещественных чисел, меньших чем  $f(a)$ :

$$\{f(A_1), \dots, f(A_T); f(z)\}.$$

Следовательно, имеются  $T + 1$  топологически различных случаев, когда  $f(\alpha) > f(z)$ , и ещё один отличный топологически от них случай, когда  $f(\alpha) < f(z)$ .



**Рис. 12.** Оснащение концевых вершин  $A_1$  и  $A_T$  цепочки



Зная интервал, в котором расположено критическое значение  $f(\alpha)$ , рассмотрим критическое значение  $f(\omega) > f(z)$ . Оно должно отличаться от  $T + 2$  значений

$$\{f(A_1), \dots, f(A_T); f(a), f(\alpha)\}$$

на луче  $\{t > f(z)\}$ , если  $f(\alpha) > f(z)$  (будучи отличным от  $T + 1$  значений

$$\{f(A_1), \dots, f(A_T); f(a)\}$$

на луче  $\{t > f(z)\}$ , если  $f(\alpha) < f(z)$ ).

Итого мы находим

$$(T + 1)(T + 3) + 1(T + 2) = T^2 + 5T + 5$$

*топологически различных типов оснащений  $(\alpha, \omega)$  тройных вершин  $A_1$  и  $A_T$ .*

В конечной вершине  $a_2$ , соединённой в графе ребром с тройной вершиной  $A_2$ , критическое значение должно отличаться от  $T + 4$  уже выбранных значений

$$\{f(A_1), \dots, f(A_T); f(a), f(\alpha), f(z), f(\omega)\},$$

что подразделяет каждый из изученных выше случаев на  $T + 5$  подслучаев. Выбрав  $f(a_2)$ , мы получаем  $T + 5$  препятствий для выбора  $f(a_3)$  и т. п., для выбора  $f(a_i)$  число препятствий равно  $T + 2 + i$ : нужно избегать всех значений

$$\{f(A_1), \dots, f(A_T); f(a), f(z), f(\alpha), f(\omega); f(a_2), \dots, f(a_{i-1})\}.$$

Эти препятствия разделяют вещественную ось на  $T + 3 + i$  интервалов, умножая число подслучаев в описываемой нами классификации на множитель  $T + 3 + i$ .

Повторяя это рассуждение  $T - 2$  раза (при  $i = 2, 3, \dots, T - 1$ ), мы подразделим каждый из  $T^2 + 5T + 5$  случаев оснащения концевых тройных вершин  $A_1$  и  $A_T$  на много подслучаев, число которых равно произведению чисел интервалов на последовательных шагах нашей конструкции:

$$(T + 5)(T + 6) \dots (T + 3 + T - 1) = \frac{(2T + 2)!}{(T + 4)!}.$$

Все эти подклассы доставляют все топологически различные оснащения, и каждое встречается по одному разу, что и доказывает теорему 4.  $\square$

Чтобы доказать теорему 3, мы начнём со следующего (индуктивного) предложения.

**Лемма.** Для любого  $T \geq 2$  имеет место неравенство

$$\varphi(T) \leq 4T^2 \varphi(T-1).$$

**Пример.** При  $T = 2, 3$  и  $4$  мы находим (прямыми подсчётами)

$$(\varphi(2) = 19) < (16 \cdot 2 = 32);$$

$$(\varphi(3) = 428) < (36 \cdot 19 = 684);$$

$$(\varphi(4) = 17\,746) < (64 \cdot 428 = 27\,392).$$

В этих случаях утверждение леммы справедливо.

**Доказательство леммы.** Максимальное критическое значение достигается в одной из конечных вершин  $A$  связного графа с  $T$  тройными вершинами. Эта концевая вершина соединена ребром с одной из тройных вершин  $B$ . Выкинув ребро  $AB$ , мы уменьшим исходный граф с  $T$  тройными вершинами до меньшего связного графа с  $T-1$  тройной вершиной.

Таких меньших (правильно упорядоченных) графов  $\varphi(T-1)$  штук. Чтобы восстановить исходный больший правильно упорядоченный граф, нужно выбрать в меньшем графе ребро, поместить на него новую тройную вершину  $B$  и соединить её ребром с новой концевой вершиной  $A$ , находящейся выше всех остальных.

Для этих выборов мы располагаем  $2(T-1) + 1 = 2T - 1$  рёбрами меньшего графа, куда поместится вершина  $B$ . Значение в выбранной вершине  $B$  должно отличаться от  $2T$  значений в вершинах меньшего графа, что доставляет  $2T + 1$  вариант (разных топологических типов).

Общее число вариантов обоих выборов равно  $(2T-1)(2T+1) = 4T^2 - 1 < 4T^2$ , откуда и получается неравенство леммы.  $\square$

В действительности мы доказали больше, чем утверждение леммы, оценив сверху не только число графов функций  $\varphi(T)$ , но и большее число, считающее и такие «неправильные» упорядочения вершин деревьев, у которых высота какой-либо тройной точки выше всех трёх высот соседних в графе вершин (или ниже всех трёх). Такого не может быть в упорядоченных графах функций, число которых поэтому меньше оценённого нами числа.

**Доказательство теоремы 3.** При  $T = 3$  мы имеем

$$(\varphi(3) = 428) < (3^6 = 729).$$

Если неравенство теоремы 3 справедливо для  $T = S-1$ , то мы получаем из леммы неравенство

$$\varphi(S) \leq 4S^2(S-1)^{2S-2}. \quad (*)$$

Используя очевидное неравенство

$$\left(1 - \frac{1}{S}\right)^S < \frac{1}{e},$$

мы находим оценку правой части неравенства (\*):

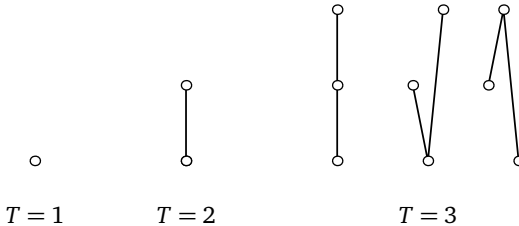
$$4S^2(S-1)^{2S-2} \leq \frac{4S^2}{(S-1)^2} \left(\frac{S-1}{S}\right)^{2S} S^{2S} \leq \frac{4}{e^2} \frac{S^2}{(S-1)^2} S^{2S}.$$

Коэффициент  $4S^2/(e^2(S-1)^2)$  меньше 1 при  $2S \leq e(S-1)$ , что выполняется при  $S \geq 4$ .

Иначе говоря, если  $S \geq 4$ , то неравенство теоремы 4 для  $T = S - 1$  вместе с неравенством (\*) доставляет неравенство  $\varphi(S) \leq S^{2S}$  теоремы 3, которая тем самым последовательно доказывается для  $T = 4, 5, \dots$  □

**Доказательство теоремы 1.** Рассмотрим  $T$  тройных точек дерева с  $2T + 2$  вершинами. Они образуют множество вершин связного подграфа, получающегося из исходного графа с  $T$  тройными точками выкидыванием  $T + 2$  рёбер, соединяющих их с его концевыми вершинами.

При  $T = 1, 2$  или  $3$  остающиеся (упорядоченные) графы имеют вид, изображённый на рис. 13.



**Рис. 13.** Укороченные графы деревьев с  $T \leq 3$  тройными вершинами

Оснащения пересчитываются, как в доказательстве теоремы 3 в первых трёх случаях, и мы получаем

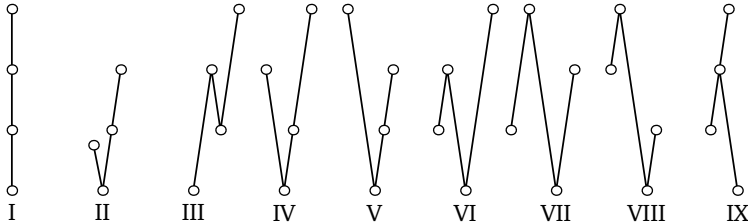
$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 2, & \varphi(2) &= 4 + 5 \cdot 3 + 5 = 19, \\ \psi(3) &= (9 + 5 \cdot 3 + 5) \cdot 8 = 232 \end{aligned}$$

оснащений соответственно.

Каждый из оставшихся двух случаев разбирается аналогично доказательству теоремы 4 выше, доставляя в каждом случае 98 оснащений.

Равенство чисел оснащений этих двух упорядоченных графов заранее очевидно из-за симметрии (отражение в горизонтальной оси), переводящей один из этих упорядоченных графов в другой.

В случае  $T = 4$  тройных вершин приходится разбирать 9 существенно разных случаев (рис. 14).



**Рис. 14.** Укороченные графы деревьев с  $T = 4$  тройными вершинами

Случаи II, IV, V, VI, IX (каждый) представляют по два упорядоченных графа, симметричных относительно горизонтальной оси (подобно двум последним графам, рассмотренным выше при  $T = 3$ ).

Эти симметричные друг другу упорядоченные графы различны, но числа их оснащений одинаковы (из-за их симметрий, продолжаемых до симметрий оснащений симметричных графов).

Числа  $\psi$  оснащений в этих 9 случаях даются таблицей.

Случай	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$\psi$	3690	1680	586	1360	1360	534	486	756	1180

Самый большой случай I исследован выше, в доказательстве теоремы 2. Подсчёты чисел оснащений в остальных случаях следуют тому же методу, но детали слишком многочисленны, чтобы все их помещать в эту лекцию: я предпочитаю рассматривать их как естественное упражнение к нашему курсу.

Общее число оснащений всех укороченных графов с учётом симметричных пар случаев доставляется суммированием:

$$\begin{aligned} \varphi(4) &= \psi(I) + \psi(III) + \psi(VII) + \psi(VIII) + \\ &\quad + 2(\psi(II) + \psi(IV) + \psi(V) + \psi(VI) + \psi(IX)) = \\ &= 5518 + 2 \cdot 6114 = 17\,746, \end{aligned}$$

что и доказывает теорему 1 (при  $T = 4$ ). □

Будет ли случай, аналогичный случаю I, наибольшим при любом  $T > 4$ , я не знаю.

*Замечание.* Было бы интересно исследовать, как именно растёт на самом деле величина  $\varphi(T)$  с ростом  $T$ : вероятно, она растёт в основном как  $T^{cT}$  (в пренебрежении «логарифмическими» поправками вроде  $\text{const}^T$ ). Постоянная  $c$  (заключённая между 1 и 2 по теоремам 2 и 3) кажется эмпирически более близкой к 2 (а может быть, и равна 2, в пренебрежении «логарифмическими» сомножителями)<sup>1</sup>.

Приведённые выше вычисления функций  $\psi$  для девяти случаев ( $T = 4$ ) подсказывают некоторую однородность распределения всех оснащённых графов между описанными девятью классами. Например, для специального типа подграфов с  $T$  тройными вершинами с критическими значениями

$$\Pi(T) = \{a_1 > a_2 > \dots > a_{T-1}; a_1 > b > a_2\}$$

в последовательных вершинах  $(B, A_1, A_2, \dots, A_{T-1})$  асимптотики чисел оснащений таковы, что

$$\frac{\psi(\Pi(T))}{\psi(I(T))} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{при } T \rightarrow \infty,$$

так что

$$\psi(\Pi(T)) \sim \frac{T^2 \cdot (2T+2)!}{2 \cdot (T+4)!}.$$

Интересно было бы найти подобные соотношения между асимптотиками чисел оснащений других укороченных графов: как они зависят от геометрии укороченного (оснащённого) графа и почему появляется отношение  $1/2$  в случае пары I, II? Всегда ли подобные отношения будут стремиться к рациональным числам? Меньше ли они единицы?

Я даже надеюсь, что из подобных соображений можно будет извлечь оценку снизу

$$\varphi(T) \geq VT^2 \varphi(T-1),$$

с какой-либо постоянной  $V$  и даже, может быть, с  $V = 2$ .

Эта надежда объясняется следующим (нестрогим) «физическим» рассуждением. Мы разобрали выше  $4T^2 - 1$  способ добавить новое ребро, ведущее к самой высокой критической точке. Большая часть этих способов действительно доставляет новые графы с одной новой тройной вершиной, произвольно выбранной на одном из  $2T - 1$  рёбер меньшего графа с  $T - 1$  тройной вершиной. Трудность составляет только выбор критического значения в новой вершине. Для этого выбора

<sup>1</sup> Эту гипотезу в 2006 году доказал Л. Николаеску, ознакомившийся с настоящей лекцией 2005 года (Functional analysis and other mathematics. 2006. V. 1, № 1).

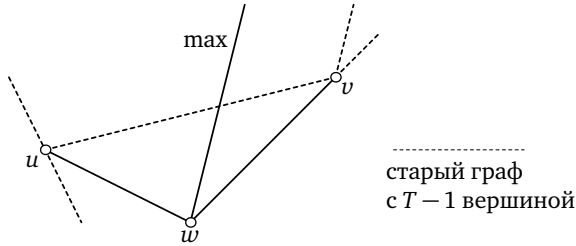


Рис. 15. Невозможный выбор нового критического значения  $w$

мы располагаем  $2T + 1$  интервалом, но при этом новое критическое значение  $w$  не должно оказаться меньшим, чем оба значения  $u$  и  $v$  в концевых вершинах того ребра, где выбрана новая вершина.

Беда в том, что (см. рис. 15) третий сосед новой тройной вершины — это самая высокая вершина нового упорядоченного графа, поэтому если  $u > w$  и  $v > w$ , то критическое значение  $w$  окажется меньшим, чем все три критических значения в соседних вершинах графа (чего в упорядоченном графе хорошей функции Морса никогда не бывает).

Постараемся оценить, насколько это препятствие уменьшает число реализуемых больших упорядоченных графов, построенных из данного укороченного графа.

Эвристическое (нестрогое) рассуждение подсказывает для события  $\{w < u, w < v\}$  «вероятность» порядка  $1/4$ , так как каждое из неравенств имеет, по-видимому, «вероятность»  $1/2$  и они кажутся независимыми.

Если это так, то из общего числа  $4T^2 - 1$  больших графов придётся отбросить четверть, для которой не существует функций с такими графами. Исползованная в этом нестрогом выводе асимптотическая «эргодичность» (распределения значений в вершинах случайного графа) — трудная гипотеза. Кроме доказательства, она может исследоваться эмпирически, путём экспериментального перечисления всех графов (скажем, с  $T = 5, 6, 7, 8$  тройными точками), для чего потребовалось бы всего несколько часов работы компьютера.

Приняв «вероятность»  $1/4$ , мы заменим коэффициент  $B = 4$  на  $B = 3$ . Но числа из теоремы 1 подсказывают даже меньшее значение предела (при  $T$ , стремящемся к бесконечности) отношения

$$\frac{\varphi(T)}{T^2 \varphi(T-1)},$$

которое ближе к 2, чем к 3.

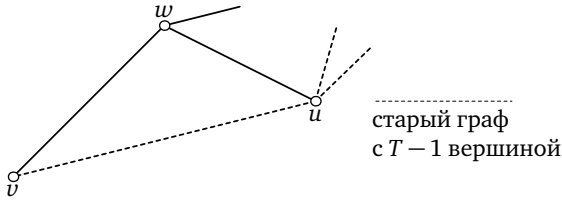


Рис. 16. Невозможный выбор нового критического значения  $w$

Это меньшее значение коэффициента  $B$  может быть объяснено (по меньшей мере эвристически) следующим препятствием к построению большего упорядоченного графа (см. рис. 16).

Предположим, что новое значение  $w$  выше значений в обоих концах ребра, на котором выбрана новая тройная вершина:  $w > u$ ,  $w > v$ .

Если при этом значения расположены в порядке

$$v < u < w,$$

то выбор значения  $w$  в новой тройной вершине может испортить старую тройную вершину, где достигается значение  $u$ : это случится, если в обеих соседних с ней в старом графе вершинах достигались бóльшие чем  $u$  значения. В такой ситуации в новом упорядоченном графе значение  $u$  (в старой тройной вершине нового графа) будет меньше значений во всех трёх её соседних (в новом графе) вершинах, что невозможно для графа функции Морса.

Вычисляя опять «вероятность» нового препятствия, мы должны будем заменить коэффициент  $B = 3$  на его три четверти, получая  $B = 9/4$ . Это (полуэмпирическое) предположение не слишком далеко от наблюдавшихся значений: отношение

$$\frac{(\varphi(T = 4) = 17\,746)}{(\varphi(3) = 428)}$$

не сильно отличается от величины произведения

$$(B = 9/4)(T = 4)^2 = 36.$$

Разумеется, эти полуэмпирические выводы следовало бы подкрепить не только доказательством (которое может быть вовсе не простым) сформулированных выше гипотетических утверждений эргодической теории случайных графов (приводящих к  $B = 9/4$ ), но и численным экспериментом (для которого нужно либо вычислить несколько следующих значений  $\varphi(T)$ , либо прямо перечислять или даже лишь предъясвлять случайные упорядочения случайных деревьев, что должно бы требовать меньшего компьютерного времени).

Так или иначе, с какой бы постоянной  $B$  ни получалось неравенство

$$\varphi(T) > BT^2\varphi(T-1),$$

оно привело бы к росту величины  $\varphi(T)$ , подобному росту величины  $T^{2T}$  (если пренебрегать зависящими от коэффициента  $B$  «логарифмически малыми» по сравнению с  $T^{2T}$  множителями вроде  $\text{const}^T$ ).

В действительности верхняя оценка из теоремы 3 доказана выше для большего, чем  $\varphi(T)$ , числа упорядоченных графов, включая и не реализуемые как упорядоченные графы функций (не реализуемые графы допускают такие тройные вершины, которые выше всех трёх соседних в графе вершин или ниже всех трёх, чего в упорядоченных графах функций не бывает).

Чтобы извлечь из доказательств этих оценок сверху оценку снизу, нужно было бы знать «вероятности» описанных выше неприятностей, но их вычисление требует трудных результатов эргодической теории случайных упорядочений случайных графов, которых я не смог получить (ни доказать, ни подтвердить численным экспериментированием).

Именно в надежде на успехи слушателей в этой новой и неизведанной области я включил приведённую полуэмпирическую теорию в настоящую лекцию.

Помимо топологической классификации упорядоченных графов функций интересен и вопрос о топологической классификации самих функций (с данным графом  $\Gamma$ ) на фиксированном многообразии  $M$ .

В случае двумерного многообразия (например, сферы  $S^2$ ) упорядоченный граф (с данными критическими значениями) определяет, по-видимому<sup>1</sup>, топологический тип функции Морса. При большей размерности положение сложнее и соответствующий вариант нашей комбинаторной теории не построен: неясно, сколько типов функций Морса на  $S^3$  соответствует заданному графу, даже если фиксировать индексы Морса и критические значения, соответствующие вершинам графа.

Функция  $f$  на  $M$  получается из функции  $\tilde{f}$  на своём графе  $\Gamma$  при помощи естественного отображения  $\pi: M \rightarrow \Gamma$ , сопоставляющего каждой точке области определения функции компоненту множества уровня, содержащую эту точку области определения:

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ \Gamma & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}. \end{array}$$

<sup>1</sup> Строгое доказательство следовало бы опубликовать: оно, кажется, не опубликовано.



Топологические (например, гомотопические) инварианты естественного отображения  $\pi$  доставляют интересные топологические инварианты функций  $f$  (с данным графом  $\Gamma$ ), и было бы интересно узнать, каковы они (и какие отображения  $\pi$  реализуются гладкими функциями  $f$  на данном многообразии  $M$ ).

Например, этот вопрос, кажущийся лёгким для  $M = S^2$ , интересен для тригонометрических многочленов от двух переменных  $f: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Соответствующий граф  $\Gamma$  имеет один цикл ( $g$  циклов для поверхности  $M^2$  рода  $g$ ). Доказать это свойство графа  $\Gamma$  — полезное упражнение на подсчёт эйлеровой характеристики:

$$\begin{aligned}\chi(M^2) &= 2 - 2g, \\ \chi(\Gamma) &= (\text{число вершин}) - (\text{число рёбер}) = \\ &= (T + K) - \frac{3T + K}{2} = 1 - (\text{число циклов в } \Gamma).\end{aligned}$$

Для тригонометрического многочлена  $f$  данной степени  $n$  топологическая сложность отображения  $\pi: T^2 \rightarrow \Gamma$  должна, видимо, оцениваться некоторой (пока не найденной) функцией от  $n$ . Было бы интересно узнать, сколько разных гомотопических классов отображений  $\pi$  реализуется тригонометрическими многочленами данной степени  $n$  (или с данным спектром, являющимся конечным подмножеством в решётке волновых векторов  $\mathbb{Z}^2$ )<sup>1</sup>.

### § 3. Статистика и топология периодических функций и тригонометрических многочленов

Функция Морса  $f: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$  с  $T$  седловыми критическими точками и  $K$  точками максимума и минимума имеет граф с  $T$  (тройными) точками ветвления и  $K = T$  концевыми точками. Этот граф (см. рис. 17) имеет  $p = 2T$  рёбер и один цикл (оснащённый примыкающими к его точкам деревьями).

**Пример.** Рассмотрим четырёхпараметрическое семейство тригонометрических многочленов

$$f_{A,B,C,D}(x, y) = A \sin x + B \sin y + C \sin(x + y) + D \cos(x + y). \quad (1)$$

<sup>1</sup> Первые результаты в этом направлении опубликованы в 2006 году: Арнольд В. И. Статистика и классификация топологий периодических функций и тригонометрических многочленов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 15–24; Arnold V. I. Topological classification of trigonometric polynomials related to affine Coxeter group  $\tilde{A}_2$ . The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, ICTP. 2006. IC/2006/039. 15 p. [http://users.ictp.it/~pub\\_off/preprints-sources/2006/IC2006039P.pdf](http://users.ictp.it/~pub_off/preprints-sources/2006/IC2006039P.pdf)

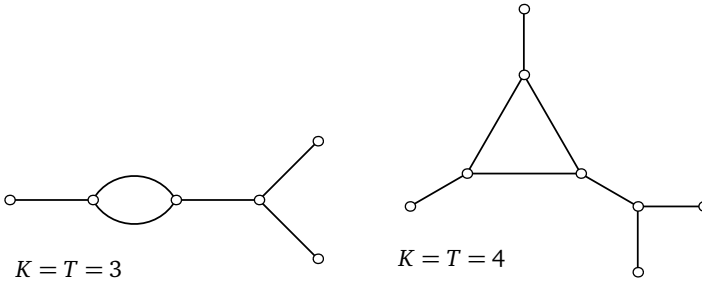


Рис. 17. Графы с одним циклом и  $T$  тройными вершинами

Мы будем считать их функциями на торе

$$T^2 = \{x \pmod{2\pi}, y \pmod{2\pi}\}.$$

Как мы увидим ниже, максимальные числа их критических точек (для невырожденных функций Морса) суть  $K = T = 4$ , так что числа вершин и рёбер графа суть  $B = 8$ ,  $P = 8$  (на самом деле максимумы меньше,  $K = T = 3$ ).

Подсчёт показывает, что число упорядоченных графов гладких функций на торе с такими значениями параметров — 550, причём многочлены (1) доставляют не более двенадцати из этих 550 правильно упорядоченных графов.

Гипотетически при повышении степеней тригонометрических многочленов реализуемая ими часть графов будет составлять всё меньшую долю множества всех правильно упорядоченных графов с таким же числом вершин, и я надеюсь, что слушатели сумеют продвинуться в направлении доказательства этой гипотезы.

Наряду с классификацией упорядоченных графов тригонометрических многочленов данной степени интересен и вопрос о топологической классификации самих многочленов. Более того, даже топологически эквивалентные тригонометрические многочлены данной степени или с данным спектром могут образовывать несколько связных областей в пространстве всех таких тригонометрических многочленов, и изучить топологию этих областей (в частности, их число) — интересный вопрос, который я здесь упоминаю ради того, чтобы слушатели приняли участие в его решении.

При этом кроме пространства всех тригонометрических многочленов данной степени интересно также исследовать более общее пространство тригонометрических многочленов с любым данным

спектром  $S$ :

$$f(z) = \sum_{k \in S} f_k e^{i\langle k, z \rangle}, \quad f_k \in \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{C}^m.$$

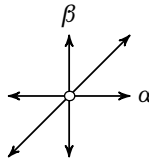
Здесь «волновые векторы»  $k \in S \subset \mathbb{Z}^m$  гармонических волн на  $m$ -мерном торе принадлежат конечному «спектру»  $S$ . Чтобы формула задавала вещественный тригонометрический многочлен  $f: T^m \rightarrow \mathbb{R}$ , коэффициенты должны удовлетворять условию вещественности ( $f_{-k} = \bar{f}_k$ ). Напомню, что знаком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  выше обозначено эрмитово скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{C}^m$  (заданное формулой  $\langle k, z \rangle = \sum_{j=1}^m (k_j \bar{z}_j)$  для векторов  $k$  и  $z$  с компонентами  $k_j$  и  $z_j$ , где  $\bar{z} = x - iy$  при  $z = x + iy$ , т. е. знак черты означает комплексное сопряжение).

Я предполагаю, что слушатели знают основы теории гармонических волн из школьного курса физики (или из элементарного учебника Ландау и Лифшица), так что понимают, что предыдущие комплексные формулы можно переписать в вещественном виде

$$\sum_k (a_k \cos(k, x) + b_k \sin(k, x)),$$

где  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $k \in S$ ,  $(k, x) = \sum (k_j x_j)$  — евклидово скалярное произведение.

В качестве спектров особенно интересных тригонометрических многочленов можно брать «расширенные системы корней аффинных групп отражений» (которые я здесь не буду описывать). Замечу только, что для простейшей группы  $A_2$  (соответствующей симметриям правильного треугольника) соответствующий спектр состоит из 6 векторов  $(\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha + \beta))$  двумерной плоскости.



Соответствующие этому спектру тригонометрические многочлены имеют вид (1). Они образуют не шестипараметрическое, а четырёхпараметрическое семейство, так как на самом деле нужны были бы ещё комбинации функций  $\cos x$  и  $\cos y$ , но от них можно избавиться выбором в качестве начала координат нужной точки тора  $T^2$ , так что общий случай члена шестипараметрического семейства сводится к случаю (1) сдвигом начала координат.

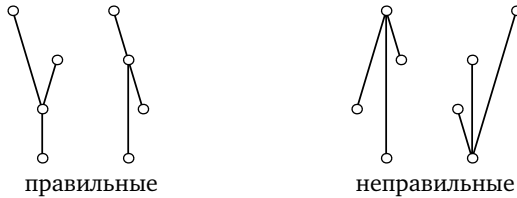
Перенесение теории, излагаемой ниже для случая простейшего семейства (1), на случай тригонометрических многочленов более вы-

соких степеней (или связанных с более общими системами корней, или даже с любыми спектрами) — одна из цепей включения описываемой ниже элементарной теории в настоящую лекцию.

Здесь, несомненно, возможен быстрый прогресс (с интересными новыми научными результатами), не требующий каких-либо предварительных знаний. Это — задачи второго типа в классификации Пуанкаре.

Обратимся теперь к классификации графов функций Морса на торе  $T^2$ .

**Определение.** *Правильно упорядоченным графом* назовём граф с  $T$  тройными вершинами и  $K$  концевыми вершинами, которым приписаны различные значения так, что ни в какой тройной вершине значение не может быть меньше, чем во всех трёх соседних в графе вершинах, и не может быть больше, чем во всех трёх соседних в графе вершинах. Мы будем называть упорядочивающие значения «высотами» вершин.



**Рис. 18.** Правильные и неправильные упорядочения вершин графа  $Y$

Точные значения высот вершин в определении упорядочения графа не входят: два набора высот вершин считаются задающими одинаковые упорядочения, если одна вершина ниже другой в обоих наборах одновременно.

**Теорема 5.** *Число топологически разных правильных упорядочений графов с одним циклом и  $T = 4$  тройными вершинами ( $K = 4$  концевыми точками и  $P = 8$  рёбрами) равно 550.*

**Доказательство.** Такой граф имеет ровно один цикл, состоящий из 2, 3 или 4 рёбер. Точки ветвления графа образуют одну из 11 конфигураций  $A-K$  на рис. 19. Здесь и далее мы обозначаем точки ветвления квадратиками, а концевые точки (отсутствующие на рис. 19) — маленькими окружностями.

Здесь высоты изображены значениями ординат вершин, исключая только случай  $G$ , где ординаты двух вершин выбраны одинаковыми.

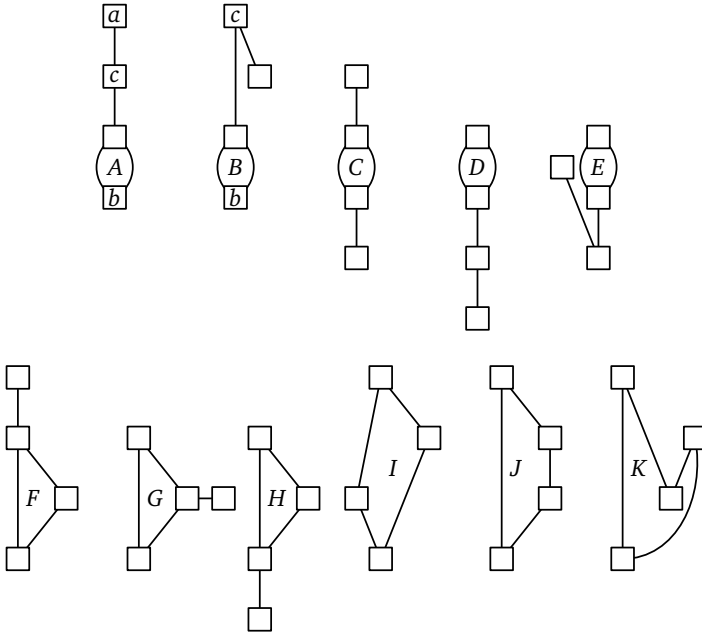


Рис. 19. Укороченные графы с одним циклом и 4 тройными вершинами

Мы должны теперь сосчитать числа правильно упорядоченных графов каждого из этих 11 типов. Из симметрии (относительно горизонтальной оси) ясно, что эти числа удовлетворяют соотношениям

$$|A| = |D|, \quad |B| = |E|, \quad |F| = |H|,$$

так что существенно различны только 8 случаев  $A, B, C, F, G, I, J, K$ , которые мы теперь и разберём.

**Случай А.** Из верхней точки ветвления, уровня  $a$ , обязано выходить (максимальное) ребро вверх ( $aa'$ ). Из нижней точки, уровня  $b$ , обязано выходить (минимальное) ребро вниз ( $bb'$ ).

Остаются ещё два ребра ( $aa$ ) и ( $c\beta$ ), выходящие из точки ветвления уровня  $a$  и из точки ветвления уровня  $c$  (соответственно).

Граф определяется высотами вершин  $\alpha$  и  $\beta$ . Четыре значения в точках ветвления и значение  $b'$  делят полуось значений, меньших значения  $a'$ , на 6 частей, так что для выбора значения  $\alpha$  есть 6 (топологически разных) возможностей.

После того как значение  $\alpha$  выбрано, для выбора значения  $\beta$  ось значений разделена четырьмя значениями в точках ветвления и выбранными уже значениями ( $a', b', \alpha$ ) на 8 частей.

Итого получаем 48 (топологически разных) случаев, так что число правильных неэквивалентных упорядоченных графов типа  $A$  равно 48.

*Замечание.* Для дальнейшего анализа тригонометрических многочленов полезно выделять те случаи, когда число точек графа на каждой высоте не превосходит 2.

Это только три случая  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$  из шести на рис. 20.

При выборе высоты  $\alpha_1$  для выбора  $\beta$  имеется две возможности (выше или ниже высоты  $c$ ). При выборе  $\alpha_2$  возможностей тоже две (обе ниже  $\alpha_2$ ). При выборе  $\alpha_3$  возможностей выбора высоты  $\beta$  нет. Итого условию (не более двух точек графа на каждой высоте) удовлетворяют всего 4 (указанных выше) случая из 48 правильных упорядочений графа типа  $A$ .

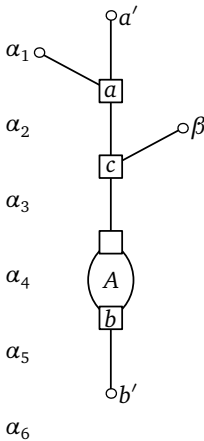


Рис. 20. Разные оснащения укороченного графа типа  $A$

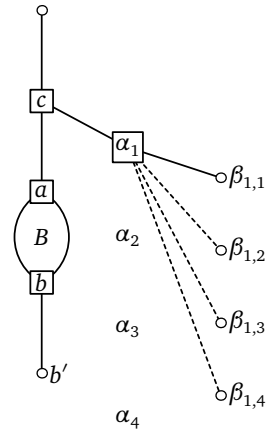


Рис. 21. Разные оснащения укороченного графа типа  $B$

**Случай  $B$ .** Значение высоты  $\alpha$  в четвёртой точке ветвления может находиться в четырёх интервалах, обозначенных на рис. 21 знаками  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ .

Если значение  $\alpha$  выбрано, то для определения упорядоченного графа остаётся назначить значения в обеих соседних вершинах точки ветвления высоты  $\alpha$ .

Обозначим меньшее из этих двух значений через  $\beta$  (оно меньше выбранного для  $\alpha$  значения  $\alpha_k$ ). Для выбора второго значения, которое мы обозначим  $\gamma$ , остаётся столько интервалов, на сколько делят интервал  $\gamma > \beta$  уже выбранные значения. В случае выбора значения  $\alpha$

типа  $\alpha_1$  мы получим следующие числа интервалов  $N$ :

Выбор $k$ в $\beta_{1,k}$	1	2	3	4
$N$	4	5	6	7

Совершенно таким же образом выбор значения  $\alpha$  типа  $\alpha_2$  приводит к интервалам  $\beta_{2,k}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) с числами ( $N = 5, 6, 7$ ) интервалов для помещения значения  $\gamma$ .

В случае значения  $\alpha$  типа  $\alpha_3$  получается два интервала  $\beta_{3,k}$  ( $k = 1, 2$ ) с числами ( $N = 6, 7$ ) интервалов для помещения значения  $\gamma$ .

Наконец, для выбора значения  $\alpha$  типа  $\alpha_4$  получаем единственный интервал  $\beta_{4,1}$  (расположенный ниже уровня  $\alpha_4$ ), который поделён на  $N = 7$  частей.

Суммируя все эти четыре подслучая, мы находим

$$(4 + 5 + 6 + 7) + (5 + 6 + 7) + (6 + 7) + 7 = 22 + 18 + 13 + 7 = 60$$

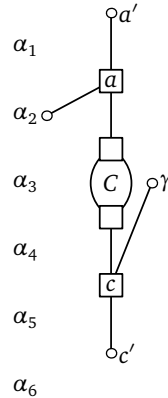
правильно упорядоченных графов типа  $B$ .

*Замечание.* Ни в одном из них не отсутствуют горизонтали с более чем двумя точками графа. Дело в том, что из вершины со значением  $\alpha_k$  выходят либо вверх, либо вниз два ребра, пересекающие одну горизонталь, а часть ( $bc$ ) графа доставляет третью точку на той же горизонтали.

**Случай С.** Обозначим через  $a$  и  $c$  значения в верхней и в нижней точках ветвления. Выше уровня  $a$  заведомо есть концевые точки рёбер, выходящих из  $a$ . Обозначим через  $a'$  максимальное из значений в их концевых вершинах. Аналогично обозначим через  $c'$  минимальное из значений в концах рёбер, выходящих из вершины уровня  $c$ .

Упорядочение определяется расположением значений  $\alpha$  (во втором соседе вершины уровня  $a$ ) и  $\gamma$  (во втором соседе вершины уровня  $c$ ); см. рис. 22.

При выбранном значении высоты  $\alpha$  ось (меньших чем  $a'$ ) значений подразделена четырьмя значениями в точках ветвления и значением  $c'$  на 6 частей ( $\alpha_k$ ). При выборе значения  $\gamma$  ось значений (больших чем  $c'$ ) подразделена на 7 интервалов (четырьмя значениями в точках ветвления



**Рис. 22.** Разные оснащения укороченного графа типа  $C$

и выбранными значениями  $a'$  и  $\alpha_k$ , если  $k \leq 5$ , в случае же  $k = 6$  и интервалов только 6, так как  $\alpha_6 < c'$ ).

Итак, общее число правильно упорядоченных графов типа  $C$  составляет  $5 \cdot 7 + 6 = 41$ .

*Замечание.* Отсутствие горизонтальных слоёв с более чем двумя точками ветвления встречается только при  $k = 1$  и  $2$  (в предыдущих обозначениях), иначе ребро  $(\alpha_k a)$  и цикл пересекали бы одну горизонталь трижды.

При этом для выбора значения  $\gamma$  тоже имеется только по 2 варианта (чтобы ребро  $(\gamma c)$  было ниже цикла). Итак, из 41 правильного графа типа  $C$  условию отсутствия трёх точек графа на одной горизонтали удовлетворяют только 4 правильных графа, описанные выше.

**Случай  $F$ .** Я оставляю в качестве задачи подсчёт числа правильно упорядоченных графов типа  $F$  (их  $6 \cdot 8 = 48$ ). Ни один из этих графов не удовлетворяет условию отсутствия трёх точек графа на одной горизонтали.

**Случай  $G$ .** Таких правильно упорядоченных графов

$$2((7) + (7 + 6) + (7 + 6 + 5)) = 76.$$

Ни один из них не удовлетворяет условию отсутствия трёх точек графа на одной высоте. Доказательства этих фактов оставляются слушателям в качестве задачи.

**Случаи  $I, J, K$ .** Числа правильно упорядоченных графов этих типов составляют соответственно  $7 \cdot 8 = 56$ ,  $56$ ,  $3 \cdot 3 = 9$ . Ни один из этих упорядоченных графов не удовлетворяет условию отсутствия трёх точек на одной горизонтали (задача).

**Окончание доказательства теоремы 5.** Суммируя числа правильно упорядоченных графов разных типов, указанные выше:

$$\begin{aligned} |A| &= 48, & |B| &= 60, & |C| &= 41, & |D| &= 48, & |E| &= 60, \\ |F| &= 48, & |G| &= 76, & |H| &= 48, & |I| &= 56, & |J| &= 56, & |K| &= 9, \end{aligned}$$

мы получаем общую сумму с учётом симметричных случаев:

$$\begin{aligned} 2(48 + 60) + 41 + 2(48 + 56) + 76 + 9 &= \\ &= 216 + 41 + 208 + 85 = 257 + 293 = 550. \quad \square \end{aligned}$$



*Замечание 1.* Я перепроверял эти скучные вычисления до тех пор, пока совершенно разные способы перечисления правильно упорядоченных графов не стали давать одинаковые ответы, и после ряда ошибочных перечислений достиг уверенности в правильности окончательного ответа и всех промежуточных.

Но проводить аналогичные подсчёты, скажем, для  $T = 5$  или  $T = 6$ , я не стал, хотя это и было бы очень полезно для открытия соответствующих общих гипотез (например, о росте числа правильно упорядоченных графов) с данным числом циклов ( $y$  нас 1) с ростом числа  $T$  тройных вершин.

*Замечание 2.* Число правильно упорядоченных графов всех типов, удовлетворяющих условию отсутствия трёх точек графа на одной горизонтали, составляет

$$4(A) + 0(B) + 4(C) + 4(D) + (0(E) + \dots + 0(K)) = 12.$$

Я предполагаю, что все эти 12 графов реализуются тригонометрическими многочленами

$$(x, y) = A \sin x + B \sin y + C \sin(x + y) + D \cos(x + y),$$

но не проверил этого, хотя можно надеяться реализовать все 12 случаев даже в окрестности точки  $A = 1, B = 1, C = -1, D = 0$  указанного четырёхмерного пространства тригонометрических многочленов<sup>1</sup>.

Бифуркационная диаграмма, образованная значениями

$$(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4,$$

соответствующими функциям с вырожденной (не морсовской) критической точкой или с кратными (принимаемыми в нескольких точках) критическими значениями, заслуживает явного топологического и алгебраического изучения (хотя бы с помощью компьютера, хотя можно сделать это и вручную). Эта трёхмерная гиперповерхность в  $\mathbb{R}^4$  является конусом над своим сечением трёхмерной плоскостью (например, гиперплоскостью  $C = 1$ ), так что речь в этой задаче идёт о рисовании двумерной (алгебраической) поверхности в обычном трёхмерном пространстве.

При попытках компьютерного исследования таких задач я обнаружил, что делаю вручную примерно втрое меньше ошибок, чем

<sup>1</sup> В действительности для таких тригонометрических многочленов число седловых точек  $T \leq 3$ , так что упомянутые 12 графов не различаются, а различаются лишь нарисованные ниже 2 графа с  $T = 3$  (см. с. 108, где ответы написаны подробнее).

компьютер (например, даже при простом перемножении сороказначных чисел). Притом, в то время как непредсказуемые компьютерные ошибки происходят от каких-то космических частиц, мои ошибки оказались всегда одинаковыми и легко контролируемы.

А именно, всякий раз, когда вычисление не уместается на одной странице и его приходится переносить и на следующую, некоторые (многозначные) числа приходится копировать. Именно это *переписывание* и вносит ошибки: я пишу мелким почерком похожие цифры 2 и 9, а также 3 и 5 — они-то и оказываются переписанными неверно, за ними-то и надо следить (возможно, не мне одному).

## § 4. Алгебраическая геометрия тригонометрических многочленов

Для сравнения графов специальных периодических функций

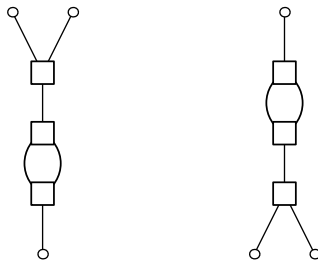
$$f_{A,B,C,D}(x, y) = A \sin x + B \sin y + C \sin(x + y) + D \cos(x + y) \quad (1)$$

с графами общих функций Морса (с таким же числом критических точек) на двумерном торе я установил следующий удивительный для меня факт.

**Теорема 6.** *Функция Морса (1) имеет на торе не более 8 критических точек. Кривая (некритического) уровня этой функции — эллиптическая кривая (рода  $g = 1$ ), её вещественные точки образуют на торе не больше двух компонент связности.*

На самом деле критических точек у тригонометрического многочлена (1) не больше 6, но мы здесь не будем этого доказывать.

Упорядоченный граф тригонометрического многочлена (1) с 6 критическими точками есть один из следующих двух графов (упорядочение вершин — по высоте):



Остальные 14 упорядоченных графов гладких функций Морса на двумерном торе, имеющих 6 критических точек, не встречаются ни у одного тригонометрического многочлена (1).

*Все функции Морса на торе с одинаковыми упорядоченными 6-вершинными графами, имеющие критические значения  $\{1, 2, \dots, 6\}$ , переводятся друг в друга диффеоморфизмами тора.*

*Существует бесконечное множество гладких функций Морса на двумерном торе с 6 критическими точками и критическими значениями  $\{1, 2, \dots, 6\}$ , упорядоченные графы которых все одинаковы, но ни одна из них не переводится в другую гомотопным тождеству диффеоморфизмом тора.*

*Из этого бесконечного множества попарно несводимых функций Морса с упорядоченным графом, указанным выше, только три функции сводятся к тригонометрическим многочленам (1) посредством диффеоморфизмов тора, принадлежащих связной компоненте единицы в группе диффеоморфизмов двумерного тора.*

Точка (общего положения) на цикле графа функции на двумерном торе изображает нестягиваемую на торе простую замкнутую кривую. Эта кривая для подходящей гладкой функции Морса с 6 критическими точками может быть любой замкнутой кривой на торе (отчего и получается бесконечное количество не сводимых друг к другу функций Морса).

*Для тригонометрического многочлена (1) простая замкнутая кривая на торе, описанная выше, принадлежит к одному из трёх типов: это либо параллель, либо меридиан, либо диагональ ( $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  или  $x + y = \text{const}$ ), отчего и получают три класса функций, упомянутые выше.*

**Доказательство.** Воспользуемся рациональностью окружности, т. е. используем обычные координаты  $t \in \mathbb{R}P^1$  и  $\tau \in \mathbb{R}P^1$  на окружностях  $\{x \pmod{2\pi}\}$ ,  $\{y \pmod{2\pi}\}$ :

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos y &= \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, & \sin y &= \frac{2\tau}{1+\tau^2}. \end{aligned}$$

Критические точки функции (1) определяются системой уравнений

$$\begin{cases} A \cos x + C \cos(x+y) - D \sin(x+y) = 0, \\ B \cos y + C \cos(x+y) - D \sin(x+y) = 0. \end{cases}$$

Из этих двух уравнений мы находим

$$A \frac{1-t^2}{1+t^2} = B \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \quad (2)$$

откуда следует, что

$$\tau^2 = \frac{A(t^2-1) + B(t^2+1)}{-A(t^2-1) + B(t^2+1)} = \frac{P_2(t)}{Q_2(t)},$$

где  $P_2$  и  $Q_2$  — многочлены второй степени,

$$P_2(t) = (B-A) + t^2(A+B),$$

$$Q_2(t) = (A+B) + t^2(B-A).$$

Нам потребуются и вытекающие из этого формулы

$$1 + \tau^2 = \frac{2B(1+t^2)}{Q_2}, \quad 1 - \tau^2 = \frac{2A(1-t^2)}{Q_2}.$$

В частности, имеет место удивительный факт:

$$\text{если } t^2 = -1, \quad \text{то } \tau^2 = -1 \quad (\text{так что } 1 - \tau^2 = 2).$$

Мы использовали одно из двух уравнений критических точек. Второе уравнение

$$A \cos x + C \cos(x+y) - D \sin(x+y) = 0$$

переписывается в обозначениях  $t$  и  $\tau$  в виде

$$A(1-t^2)(1+\tau^2) + C[(1-\tau^2)(1-t^2) - 4t\tau] + 2D[t(1-\tau^2) + \tau(1-t^2)] = 0.$$

Иными словами, выполняется квадратное уравнение

$$\tau^2 U + \tau V + W = 0 \quad (3)$$

с коэффициентами

$$U = (A-C)(1-t^2) + 2Dt,$$

$$V = -4tC + 2D(t^2-1),$$

$$W = (A+C)(1-t^2) - 2Dt.$$

Подставляя вместо  $\tau^2$  указанную выше дробь  $P_2/Q_2$ , мы получаем из уравнения (3) решение

$$\tau = \frac{p_4(t)}{q_4(t)}, \quad p_4 = UP_2 + WQ_2, \quad q_4 = -VQ_2. \quad (4)$$

Теперь уравнение  $\tau^2 = P_2/Q_2$  принимает вид  $p_4^2 Q_2 = q_4^2 P_2$ , т. е. вид

$$Q_2(p_4^2 - V^2 P_2 Q_2) = 0. \quad (5)$$

Это уравнение относительно переменной  $t$  имеет степень 10, так что мы получаем из него 10 комплексных критических точек  $(t, \tau)$ .

Однако две из них заведомо не вещественны: это точки  $(i, -i)$  и  $(-i, i)$ , для которых

$$t^2 = -1, \quad \tau^2 = -1, \quad t\tau = 1, \quad t + \tau = 0. \quad (6)$$

Действительно, при  $t^2 + 1 = 0$  мы получаем

$$\begin{aligned} P_2 &= -2A, & Q_2 &= 2A, & V &= -4(tC + D), \\ U &= 2(A - C + tD), & W &= 2(A + C - tD), \end{aligned}$$

так что левая часть соотношения (5) приобретает множитель

$$\begin{aligned} &[-4A(A - C + tD) + 4A(A + C - tD)]^2 + 16(tC + D)^2 4A^2 = \\ &= 16A^2(2C - 2tD)^2 + 64(tC + D)^2 A^2 = \\ &= 64A^2(C^2 + t^2 D^2 - 2tCD + t^2 C^2 + D^2 + 2tCD) = \\ &= 64A^2(C^2 + D^2)(1 + t^2), \end{aligned}$$

обращающийся в нуль при  $1 + t^2 = 0$ .

Итак, уравнение (5) имеет не более восьми вещественных корней  $t$ , доставляющих, в силу соотношения (4), не более 8 вещественных критических точек функции (1) на торе. □

Для исследования комплексного множества уровня

$$\{(x, y : f(x, y) = c\}$$

используем (аффинные) координаты  $t$  и  $\tau$  на комплексных проективных прямых — сомножителях произведения  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$  (комплексифицирующего исходный тор).

Уравнение множества уровня имеет вид

$$\begin{aligned} A \frac{2t}{1+t^2} + B \frac{2\tau}{1+\tau^2} + C \left( \frac{2t}{1+t^2} \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} + \frac{2\tau}{1+\tau^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) + \\ + D \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} - \frac{4t\tau}{(1+t^2)(1+\tau^2)} \right) = c. \end{aligned}$$

Иными словами, уравнение линии уровня имеет вид

$$\begin{aligned} A \cdot 2t(1 + \tau^2) + B \cdot 2\tau(1 + t^2) + C[2t(1 - \tau^2) + 2\tau(1 - t^2)] + \\ + D[(1 - t^2)(1 - \tau^2) - 4t\tau] = c(1 + t^2)(1 + \tau^2). \quad (7) \end{aligned}$$

При фиксированном значении  $t$  это квадратное уравнение относительно  $\tau$ . Поэтому комплексная линия уровня  $\{f(x, y) = c\}$  при проектировании

$$\pi: \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1,$$

заданном формулой  $\pi(t, \tau) = t$ , двулистно (разветвлённо) накрывает сферу Римана  $\mathbb{C}P^1$  с аффинной координатой  $t$ .

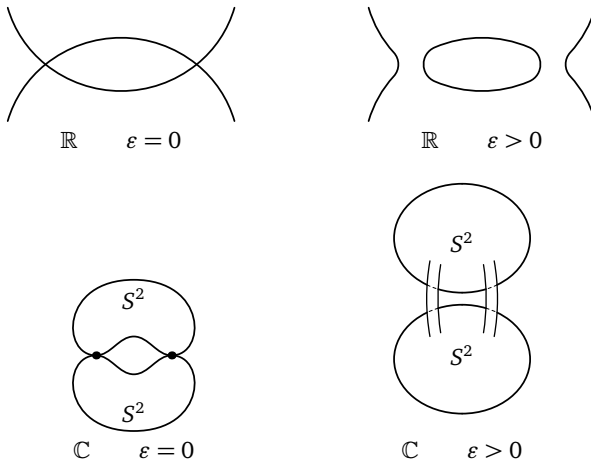
Точки ветвления  $t$  определяются условием  $\Delta(t) = 0$ , где  $\Delta$  — дискриминант квадратного уравнения (7) относительно неизвестной  $\tau$ .

Из формулы (7) видно, что этот дискриминант — многочлен степени 4 относительно  $t$ . Для типичного множества уровня типичного тригонометрического многочлена (1) дискриминант имеет 4 различных корня (а больше он не имеет никогда).

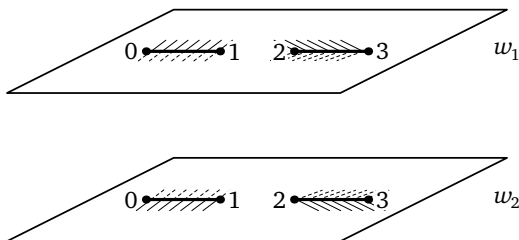
Двулистное накрытие сферы, разветвлённое в 4 точках, накрывает сферу поверхностью тора. В этом можно убедиться, например, сосчитав эйлерову характеристику, или же «итальянским» методом, задав накрытие формулой

$$w^2 = (z^2 - 1)^2 - \varepsilon \quad (\text{где } \pi(z, w) = z).$$

При  $\varepsilon = 0$  проектируемая комплексная кривая (рис. 23) представляет собой две сферы Римана ( $w = z^2 - 1$  и  $w = 1 - z^2$ ), пересекающиеся (трансверсально) в двух точках ( $z = \pm 1, w = 0$ ).



**Рис. 23.** Итальянский способ исследования двулистного накрытия сферы с четырьмя точками ветвления



**Рис. 24.** Склеивание римановой поверхности эллиптической кривой из двух сфер Римана с парой разрезов на каждой из них

Переход к  $\varepsilon \neq 0$  заменяет пару точек пересечения парой соединяющих две сферы трубочек, и пара сфер превращается в тор (поверхность рода  $g = 1$ ).

Достаточно также рассмотреть эллиптическую кривую, заданную уравнением (рис. 24)

$$w^2 = z(z-1)(z-2)(z-3),$$

и её проекцию на ось  $z$  параллельно оси  $w$  (являющуюся двулистным накрытием, разветвлённым над точками  $z = 0, 1, 2$  и  $3$ ). Разрезы  $[0, 1]$  и  $[2, 3]$  плоскости переменной  $z$  доставляют два листа  $w_1$  и  $w_2$  накрытия, склеенные вдоль разрезов, как указано, склейки и доставляют тор.

Из всего этого следует, что (неособая) линия уровня функции (1) — эллиптическая кривая (с торической римановой поверхностью рода  $g = 1$ ).

Но вещественная эллиптическая кривая не может иметь больше  $g + 1 = 2$  компонент связности (по теореме Харнака, обсуждавшейся выше, в § 2).

Поэтому вещественная линия уровня тригонометрического многочлена (1) не может иметь на торе  $\{x \pmod{2\pi}, y \pmod{2\pi}\}$  больше двух компонент связности.

Из этого следует, что в соответствующем графе на одной горизонтали не может быть больше двух точек.

По доказанному в § 3 из 550 правильно упорядоченных графов функций Морса на торе с  $T = 4$  седловыми точками имеют не больше двух точек на всех горизонталях всего 12 графов.

Значит, только такими могут быть графы тригонометрических многочленов (1): ими реализуются не более 12 из всех 550 топологически возможных графов с  $T = 4$ . Я предполагаю, что все эти 12 графов реализуются тригонометрическими многочленами (1), и то, что сам я не сумел их реализовать, послужило причиной рассказать

и о тригонометрических многочленах в этой лекции о 16-й проблеме Гильберта, посвящённой вещественной алгебраической геометрии обычных многочленов.

Ни вычислители с их компьютерами, ни алгебраические геометры со своими аксиоматиками не внесли почти никакого вклада в решение этих настоящих (real,  $\mathbb{R}$ ) задач. Наибольшие достижения в этой области, начатой Декартом и Ньютоном, Гурвицем и Клейном, Харнаком и Гильбертом, принадлежат российской математической школе: И. Г. Петровскому и В. А. Рохлину, О. Я. Виро и В. М. Харламову, Г. М. Полотовскому и Е. И. Шустину.

Но, к сожалению, самые естественные вопросы о топологической структуре обычных и тригонометрических многочленов остались, кажется, открытыми во всех этих исследованиях.

Рассмотрим, к примеру, топологическую классификацию вещественных многочленов от одной переменной степени  $n + 1$  с  $n$  вещественными критическими точками с разными критическими значениями, со старшим членом  $x^{n+1}$ .

Числа  $N$  топологических типов при небольших  $n$  нетрудно сосчитать:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$N$	1	1	1	2	5	16	61	272	1385

(мы рассматриваем здесь «топологические типы» с точностью до топологических преобразований, сохраняющих ориентации осей координат). Эта замечательная последовательность чисел  $N(n)$ , легко узнаваемая по числу Эйлера 61, доставляет разложение в ряд Тейлора для тангенса:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{N(n)t^n}{n!} = \sec t + \operatorname{tg} t, \quad \operatorname{tg} t = \frac{1}{1!}t + \frac{2}{3!}t^3 + \frac{16}{5!}t^5 + \dots$$

Теоремы настоящей лекции получены при попытке перенести эти результаты на функции нескольких переменных.

Вопрос о топологической классификации вещественных многочленов не был включён Гильбертом в его классическую формулировку проблемы, а эти догматические формулировки гипнотизируют исследователей, стремящихся скорее преуспеть в решении классической задачи, чем разобраться в сути дела.

Я рассказывал о своём решении проблемы устойчивости Биркгофа для нерезонансных положений равновесия систем Гамильтона на Международном математическом конгрессе в Стокгольме в 1962 году.



Решив эту классическую проблему, я не заметил, что доказал большее, а именно устойчивость в большинстве резонансных случаев (для резонансов порядка 5 и выше), потому что в классической проблеме исключались все резонансы. Американский математик Ю. Мозер тут же отметил это доказанное мной обстоятельство (устойчивость для «слабых резонансов»), но классическая формулировка классической проблемы помешала мне самому включить этот свой результат в доклад на Конгрессе.

К счастью, ни доклады на конгрессах, ни выборы в академии наук, ни включение проблем в список Гильберта, ни награды вроде филдсовской и нобелевской не оказывали большого влияния на развитие математики, да и других наук, так что я надеюсь, что влияние школы в Дубне будет бóльшим (и приведёт к решению слушателями хотя бы части задач, обсуждавшихся в настоящей лекции).

Например, Л. Николаеску, продолжая исследования дубнинской лекции 2005 года, доказал в 2006 году содержащуюся в ней гипотезу о скорости роста порядка  $T^{2T}$  числа типов функций Морса с  $T$  седлами на  $S^2$  (см. его статью «Morse function statistics» в журнале «Функциональный анализ и другая математика». 2006. V. 1, № 1. С. 97–103). Как растёт число типов многочленов степени  $n$ , неясно (возможно, как степень числа  $n$ , а не как его экспонента).

Работа Николаеску устанавливает удивительную связь между задачей классификации топологических типов функций Морса на  $S^2$  и теорией зеркальной симметрии квантовой теории поля (построенной А. Б. Гивенталем), хотя в статье Николаеску об этой связи явно не сказано.

Дело в том, что он нашёл рекуррентное соотношение между числами  $\varphi(T)$  типов функций Морса на сфере с  $T$  седлами, доказывающее, что эти числа топологических типов (17 746 и т. п.) появляются при исследовании разложений некоторых эллиптических интегралов в ряды по степеням параметра, от которого (рационально) зависят подынтегральные функции  $(x^3 + ax + b)^{-1/2}$ .

Доказательства теорем Гивенталю о зеркальной симметрии также основаны на выражении целочисленных характеристик чисел Ходжа (комплексных алгебраических многообразий комплексной размерности 3) через коэффициенты разложения в ряд некоторых специальных абелевых интегралов (вдоль циклов «зеркального образа» многообразия).

Причём такая же топологическая характеристика многообразия образа выражается таким же образом через аналогичные интегралы

вдоль циклов исходного трёхмерного многообразия. Интересно, что двумерным аналогом зеркальной симметрии физиков оказалась ранее открытая «странная двойственность» треугольников на плоскости Лобачевского (Арнольд, 1974).

Что окажется зеркальным образом задачи о топологической классификации гладких функций Морса по сфере  $S^2$ , остаётся, к сожалению, неясным.

Топологическая классификация тригонометрических многочленов и функций на торе, начатая выше в § 3, привела меня к неожиданным результатам, которые будут описаны на лекции в Дубне в 2006 году: классов в некоторых классификационных задачах конечное число, а в некоторых — бесконечное.

Ответы в задаче о классификации тригонометрических многочленов (1) и гладких функций с 6 фиксированными критическими значениями на торе получились такие:

Анализ $C^\infty$ : гладкие функции Морса с 6 критическими точками на торе $T^2$	16 классов	$\infty$ классов
Алгебра: тригонометрические многочлены (1)	2 класса многочленов	6 классов многочленов
	Diff( $T^2$ )-классификация функций с точностью до диффеоморфизмов тора	Diff <sub>0</sub> ( $T^2$ )-классификация функций (с точностью до гомотопных тождественному диффеоморфизмов тора)

См. препринты:

— Arnold V. Topological classification of trigonometric polynomials related to affine Coxeter group  $\tilde{A}_2$ . The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, ICTP. 2006. IC/2006/039. 15 p.

[http://users.ictp.it/~pub\\_off/preprints-sources/2006/IC2006039P.pdf](http://users.ictp.it/~pub_off/preprints-sources/2006/IC2006039P.pdf)

— Arnold V. Smooth functions statistics. The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, ICTP. 2006. IC/2006/012. 9 p.

[http://users.ictp.it/~pub\\_off/preprints-sources/2006/IC2006012P.pdf](http://users.ictp.it/~pub_off/preprints-sources/2006/IC2006012P.pdf)

— Арнольд В. Статистика и классификация топологий периодических функций и тригонометрических многочленов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 15–24.

## Лекция 2

# Комбинаторная сложность и случайность

Человеку свойственно ошибаться,  
но по-настоящему запутывает всё  
только компьютер.

*Из «законов Мерфи»*

Вера и знание — две чаши весов:  
чем выше одна, тем ниже другая.

*А. Шопенгауэр*

Сегодняшняя лекция плохо укладывается в традиционное деление математики на части (вроде «теории чисел» и «теоретико-множественной топологии»).

Вопрос о том, насколько случайна данная функция или последовательность, не поставлен математически, хотя каждый из нас понимает, что, например, последовательность

001 001 001 001

менее случайна, чем последовательность

010 010 111 001.

Я попытаюсь теперь придать этим словам некоторый математический смысл. А именно, мы свяжем с такими последовательностями некоторые геометрические объекты, и их естественные геометрические характеристики будут служить мерой сложности исходной последовательности.

Этот анализ можно отнести и к геометрии конечных функциональных пространств, и к комбинаторике, и к арифметике конечных полей, и к статистике случайных процессов, и к линейной алгебре матриц, и к теории графов, и к арифметике жордановых нормальных форм операторов, и к теории конечных разностей и численного ин-

тегрирования, но я предпочитаю не включать его ни в один из этих узких разделов математики.

## § 1. Геометрия бинарных последовательностей

Пусть  $x$  — последовательность из  $n$  нулей и единиц,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_j \in \mathbb{Z}_2 (= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Множество  $M$  всех таких последовательностей конечно, оно состоит из  $2^n$  элементов. Эти элементы можно считать вершинами  $n$ -мерного куба (рис. 1), а можно считать множество  $\mathbb{Z}_2^n$  векторным пространством размерности  $n$  (над полем  $\mathbb{Z}_2$  из двух элементов 0 и 1 с операциями Митрофанушки:  $1 + 1 = 0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ ,  $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ ,  $1 \cdot 1 = 1$ ). Для исследования закономерности последовательности  $x$  мы будем рассматривать её как функцию со значениями 0 и 1, определённую на множестве из  $n$  элементов  $j$ :  $x: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  (так что  $x(j) = x_j$ ).

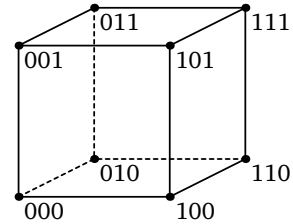


Рис. 1. Вершины  $n$ -мерного куба при  $n = 3$

Чтобы исследовать такую функцию, мы последуем рецепту Ньютона и составим последовательность её разностей:

$$y_j = x_{j+1} - x_j \in \mathbb{Z}_2.$$

Чтобы последовательность разностей состояла по-прежнему из  $n$  элементов, мы определим  $x_{n+1}$  как  $x_1$ , замкнув нашу последовательность длины  $n$  до цикла (или считая функцию  $x$  натурального элемента  $j$  периодической с периодом  $n$ ). В этом смысле мы можем считать областью определения функции  $x$  конечную окружность из  $n$  точек:

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}).$$

Эта функция  $x: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  вовсе не предполагается здесь линейной.

Среди таких функций самые простые — постоянные,  $x = 0$  и  $x = 1$ . Мы будем считать многочлены меньшей степени более простыми функциями, чем многочлены большей степени, и приведённые далее определения придадут этому замыслу точный смысл.

Согласно Ньютону, для многочленов степени меньше  $m$  (и только для них) операция взятия разностей приведёт к нулю после  $m$ -кратного применения:

$$A^m x = 0.$$

Оператор взятия разностей  $A: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$  линеен, так что  $A^m$  — это  $m$ -я степень линейного оператора  $A$ .

С другой стороны, операция  $A: M \rightarrow M$  отображает конечное множество  $M$  последовательностей в себя. Поэтому мы можем связать с ней следующий замечательный *граф операции* с  $|M| = 2^n$  вершинами  $x$ : из каждой вершины  $x$  выходит ровно одна стрелка, и она ведёт из вершины  $x$  в вершину  $Ax$ .

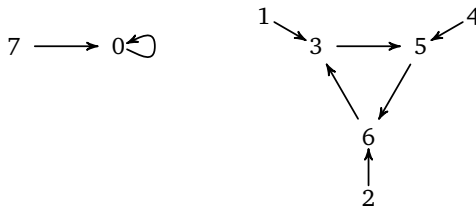
Сосчитаем, например, этот граф для случая  $n = 3$ , когда вершин 8. По определению мы находим

$$\begin{aligned} A(0, 0, 0) &= (0, 0, 0), & A(0, 0, 1) &= (0, 1, 1), & A(0, 1, 0) &= (1, 1, 0), \\ A(0, 1, 1) &= (1, 0, 1), & A(1, 0, 0) &= (1, 0, 1), & A(1, 0, 1) &= (1, 1, 0), \\ A(1, 1, 0) &= (0, 1, 1), & A(1, 1, 1) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Чтобы не писать таких длинных формул, мы используем в качестве обозначения для  $x = (x_1, \dots, x_n)$  целое число (или вычет по модулю  $2^n$ ) с такими бинарными цифрами (в двоичной системе счисления, как в компьютере):

$$X = x_1 \cdot 2^{n-1} + x_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + x_n \cdot 2^0.$$

В этих обозначениях вершина куба  $x = (1, 1, 1)$  превращается в число  $X = 7$ . Вся предыдущая таблица действия операции взятия разностей  $A$  бинарных последовательностей периода  $n = 3$  принимает вид ориентированного графа с восемью вершинами:



В графе любого отображения конечного множества в себя из каждой вершины выходит ровно одно ребро. Легко доказывается следующая теорема.

**Теорема 1.** *Каждая компонента связности графа любого отображения конечного множества в себя содержит один и только один цикл.*

*Вся компонента получается из этого притягивающего цикла-аттрактора добавлением к каждой вершине притягиваемого к ней дерева.*

Например, для операции взятия разностей в  $\mathbb{Z}_2^3$  мы нашли две компоненты с циклами длин 1 и 3, оснащёнными простейшими деревьями с двумя вершинами:



**Доказательство теоремы 1.** Рассмотрим орбиту какой-либо точки  $x$  при применении отображения  $A$  (она состоит из точек  $x, Ax, A^2x, A^3x, \dots$ ).

Поскольку всё отображаемое множество конечно, последовательные точки орбиты не могут все быть различными:  $A^p x = A^q x$  для некоторых (не равных)  $p$  и  $q$ . Пусть, скажем,  $p > q$ . Тогда  $A^r y = y$  для  $r = p - q$ ,  $y = A^q x$ , т. е. мы нашли цикл периода  $r$  (в компоненте любой точки  $x$ , т. е. в любой компоненте графа).

Если бы в одной компоненте было два цикла, соединённых конечной цепочкой рёбер графа,  $(a, b, \dots, z)$ , то ребро  $a$  было бы направлено к первому циклу, а ребро  $z$  ко второму. Поэтому в цепочке нашлась бы вершина, из которой выходили бы рёбра к обоим циклам, что невозможно, так как из каждой вершины выходит только одно ребро (а ребро, вышедшее из вершины цикла, всё принадлежит этому циклу).

Итак, цикл в компоненте один, а все остальные рёбра (его компоненты) ведут к нему, и теорема 1 доказана.  $\square$

Мы введём следующие обозначения: цикл из  $m$  рёбер обозначается знаком  $O_m$ . Если  $T$  — некоторое корневое дерево, то  $O_m * T$  будет обозначать граф, составленный из  $m$  копий корневого дерева  $T$ , где рёбра каждой копии направлены к корню дерева, а эти корни всех  $m$  деревьев составляют цикл  $O_m$  в графе.

В этих обозначениях предыдущее описание операции взятия разностей  $A: \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$  принимает вид графа из двух компонент  $(O_1 * T_2)$  и  $(O_3 * T_2)$ .

Знаком  $T_{2^n}$  мы будем обозначать бинарное корневое дерево (с  $n$  этажами выше корня и  $2^n$  вершинами), рёбра которого направлены к корню (рис. 2).

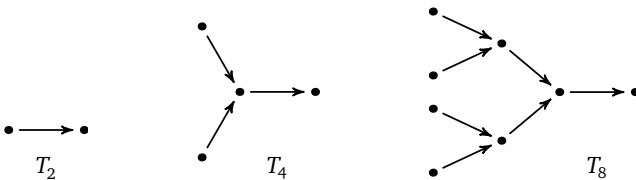


Рис. 2. Бинарные корневые деревья

Бинарность дерева означает, что в каждую вершину любого этажа, кроме первого и самого верхнего, приходит ровно 2 ребра (вышедшие из вершин следующего этажа, а для находящегося на первом этаже корня — из (единственной) вершины второго этажа).

Например, знак  $(O_2 * T_4)$  означает направленный граф с восемью вершинами, изображённый на рис. 3.

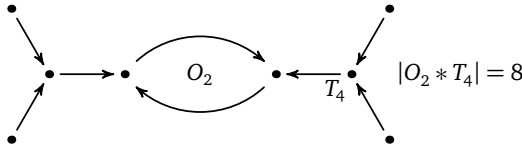


Рис. 3. Лес деревьев  $T_4$  на цикле  $O_2$

Наш план исследования сложности последовательности  $x \in \mathbb{Z}_2^n$  состоит в том, чтобы рассматривать точку  $x$  как вершину графа операции Ньютона (взятие разностей)  $A: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ .

Последовательность  $x$  будет считаться тем более сложной, чем большей компоненте графа операции  $A$  принадлежит эта точка  $x$  (т. е. чем больше длина цикла этой компоненты и чем больше лес оснащающих этот цикл в компоненте деревьев), а также при фиксированной длине цикла для сложности важно, насколько далеко от цикла расположена точка  $x$ , на сколь высокой ветке дерева она находится.

Для этого мы прежде всего перечислим все компоненты графа, их циклы и леса. Это уже нелёгкая задача, и я полностью знаю ответы только при  $n \leq 12$ .

## § 2. Графы операций взятия разностей

Подобно тому, как это сделано выше для периодических последовательностей длины  $n = 3$ , я сосчитал графы операций взятия разностей периодических бинарных последовательностей периода  $n$ ,

$$A: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n \quad \text{для всех } n \leq 12.$$

При бóльших  $n$  я этого не сделал, потому что число вершин графа  $2^n$ , равное при  $n = 12$  всего 4096, ещё позволяет в этом случае нарисовать весь этот граф на одной странице, тогда как при бóльших значениях  $n$  он занимает несколько страниц и я начинаю путаться в своих (бескомпьютерных) вычислениях.

Между тем продолжить эти мои вычисления на бóльшие значения  $n$  было бы очень интересно, в особенности потому, что уже анализ случаев  $n \leq 12$  приводит к целому ряду увлекательных гипотез, которые хотелось бы проверить экспериментально, прежде чем пытаться их доказывать.

Именно эта возможность быстро (и ничего заранее не зная) продолжить мои исследования побудила меня включить эту тему в настоящий курс лекций для школьников в Дубне: я надеюсь, что слушатели добьются новых успехов.

**Теорема 2.** *Графы операций  $A$  взятия разностей бинарных периодических последовательностей длины  $n \leq 12$  имеют такие структуры, как указано в следующей таблице:*

$n$	$b$	Компоненты графа операции $A$	Соотношение
2	1	$(O_1 * T_4)$	$A^2 = 0$
3	2	$(O_3 * T_2) + (O_1 * T_2)$	$A^4 = A$
4	1	$(O_1 * T_{16})$	$A^4 = 0$
5	2	$(O_{15} * T_2) + (O_1 * T_2)$	$A^{16} = A$
6	4	$2(O_6 * T_4) + (O_3 * T_4) + (O_1 * T_4)$	$A^8 = A^2$
7	10	$9(O_7 * T_2) + (O_1 * T_2)$	$A^8 = A$
8	1	$(O_1 * T_{256})$	$A^8 = 0$
9	6	$4(O_{63} * T_2) + (O_3 * T_2) + (O_1 * T_2)$	$A^{64} = A$
10	10	$8(O_{30} * T_4) + (O_{15} * T_4) + (O_1 * T_4)$	$A^{32} = A^2$
11	4	$3(O_{341} * T_2) + (O_1 * T_2)$	$A^{342} = A$
12	24	$20(O_{12} * T_{16}) + 2(O_6 * T_{16}) + (O_3 * T_{16}) + (O_1 * T_{16})$	$A^{16} = A^4$

В столбце  $b$  («число Бетти») указано число компонент связности графа, перечисленных в следующем столбце. Обозначение  $20(O_{12} * T_{16})$  в строке  $n = 12$  означает, что имеется 20 (изоморфных друг другу) компонент с циклами периода 12, оснащёнными в каждой точке цикла корневым (четырёхэтажным) бинарным деревом с 16 вершинами.

Таким образом, при  $n = 12$  все 24 компоненты графа доставляют следующее число вершин:

$$\begin{aligned} 20 \cdot 12 \cdot 16 + 2 \cdot 6 \cdot 16 + 1 \cdot 3 \cdot 16 + 1 \cdot 1 \cdot 16 &= \\ &= (240 + 12 + 3 + 1) \cdot 16 = 256 \cdot 16 = 2^{12} \end{aligned}$$

(как и следовало для  $|\mathbb{Z}_2^{12}| = 2^{12}$ ). Число всех вершин всех их циклов составляет при этом  $20 \cdot 12 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 256$ .



В последнем столбце таблицы указано тождество, которому удовлетворяет линейный оператор  $A$ . Например, для компоненты  $(O_3 * T_2)$  при  $n = 3$  мы замечаем, что точка  $y = Ax$  всегда принадлежит циклу, поэтому  $A^3 y = y$ , так что  $A^4 = A$ .

Это тождество, однако, можно было бы легко предвидеть заранее алгебраически, до вычисления графа (построить который тождество помогает).

Обозначим через  $\delta: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$  линейный оператор циклического сдвига последовательности длины  $n$  (так что  $(\delta x)_j = x_{j-1}$  для  $j \in \mathbb{Z}_n$ ).

Очевидно,  $A = 1 + \delta$  (так как для вычетов по модулю 2 разность совпадает с суммой) и  $\delta^n = 1$  (так как  $\delta$  — циклический сдвиг правильного  $n$ -угольника на угол  $2\pi/n$ ).

Теперь для  $n = 3$  мы последовательно вычисляем степени оператора взятия разностей  $A$  так:

$$\begin{aligned} A &= 1 + \delta, \\ A^2 &= 1 + 2\delta + \delta^2 = 1 + \delta^2, \\ A^3 &= (1 + \delta)(1 + \delta^2) = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 = \delta + \delta^2 \end{aligned}$$

(поскольку  $\delta^3 = 1$ ,  $1 + 1 = 0$ ). Наконец,

$$A^4 = (1 + \delta)(\delta + \delta^2) = \delta + \delta^2 + \delta^2 + \delta^3 = \delta + 1 = A.$$

Таковыми же выкладками доказываются и остальные соотношения последнего столбца таблицы.

*Замечание.* Разглядывая таблицу, можно сделать ряд интересных наблюдений, и некоторые из них уже превращены сегодня в доказанные теоремы.

Например, если  $n = 2^k$ , то компонента в графе всего одна, и период равен 1, так что весь граф сводится к оснащающему корень  $x = 0$  дереву  $T_{2^n}$  с  $2^{2^k}$  вершинами.

В этом случае всё функциональное пространство  $n$ -периодических функций со значениями в  $\mathbb{Z}_2$  совпадает с кольцом «многочленов» (в общем случае подкольцо «многочленов» составляет выписанную последней компоненту связности  $O_1 * T_r$ , где  $r = 2^{2^k}$  для  $n = 2^k(2l + 1)$ ).

Под «многочленом» я понимаю здесь многочлен с рациональными коэффициентами и целыми в целых точках  $j$  значениями

$$x(j) = a_0 j^m + a_1 j^{m-1} + \dots + a_m,$$

приведённый по модулю 2, чтобы значения попали в  $\mathbb{Z}_2$ .

Удивительным образом, примерами таких «многочленов» являются целочисленные числа сочетаний

$$C_j^2 = \frac{j(j-1)}{2}, \quad C_j^3 = \frac{j(j-1)(j-2)}{6} \quad \text{и т. п.}$$

«Многочлены» периода  $n$  образуют подкольцо кольца  $n$ -периодических функций (со значениями в  $\mathbb{Z}_2$ ).

Для дальнейшего интересен вопрос, какой период имеет «многочлен»  $x(j) = C_j^k \pmod{2}$  при фиксированном  $k$ , а также какова размерность векторного пространства «многочленов» периода  $n$  со значениями в  $\mathbb{Z}_2$  (над полем  $\mathbb{Z}_2$ ), т. е. сколько из «многочленов» линейно независимы.

Эти вопросы арифметики биномиальных коэффициентов по модулю 2 легко решает геометрия треугольника Паскаля, и я оставляю их слушателям в надежде, что они где-нибудь видели этот треугольник (хотя его и нет в современных учебниках теории вероятностей для школьников).

Оставляю пока слушателям и разгадку загадочного поведения при изменении  $n$  наибольших (и других) периодов  $T$  циклов компонент графа оператора взятия разностей в  $\mathbb{Z}_2^n$ :

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T$	1	3	1	15	6	7	1	63	30	341	12

Если период  $T$  наибольшего цикла отличен от 1, то он делится на  $n$  и вдобавок частное почему-то имеет вид  $2^s - 1$ .

Например,  $341 = 11 \cdot 31$ .

Число 341 доставляет первый пример, опровергнувший продержавшееся несколько тысячелетий китайское обращение «малой теоремы Ферма». Древние китайцы думали, что если  $2^a \equiv 2 \pmod{a}$ , то число  $a$  простое. Но для  $a = 341$  это сравнение выполняется, поскольку

$$\begin{aligned} 2^{11} &\equiv 2 \pmod{11}, & 2^{11} &\equiv 2 \pmod{31}, \\ 2^{31} &\equiv 2 \pmod{11}, & 2^{31} &\equiv 2 \pmod{31}. \end{aligned}$$

Удивительно в таблице и то, что каждая компонента связности графа имеет вид  $O_m * T_{2^k}$ , где бинарное дерево  $T_{2^k}$  такое же, как для кольца «многочленов» соответствующего периода.

Этот факт объясняется элементарной геометрией линейного оператора

$$A: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n.$$

Эта геометрия утверждает, что множество  $\text{Ker}(A^s)$  решений  $x$ -линейного однородного уравнения

$$A^s x = 0,$$

является векторным подпространством векторного пространства  $\mathbb{Z}_2^n$ , а множество решений соответствующего неоднородного уравнения (с правой частью  $y$ ) — параллельное ему аффинное подпространство.

Подпространства решений однородных уравнений с разными  $s$  образуют растущую последовательность

$$\text{Ker}(A) \subseteq \text{Ker}(A^2) \subseteq \text{Ker}(A^3) \subseteq \dots \subseteq \text{Ker}(A^\infty)$$

(где  $\text{Ker}(A^\infty)$  означает просто наибольшее из пространств последовательности). Знак «Ker» происходит от слова «Kernel» = «ядро», как называют пространство решений однородного уравнения.

Это пространство  $\text{Ker}(A^\infty)$  и есть кольцо «многочленов», так как по теореме Ньютона «многочлены» образуют объединение всей последовательности (пространств многочленов разных степеней). В графе операции  $A$  это компонента, притягиваемая аттрактором  $0$  периода  $1$ .

Другую последовательность подпространств образуют образы степеней оператора  $A$ :

$$\mathbb{Z}_2^n \supseteq A(\mathbb{Z}_2^n) \supseteq A^2(\mathbb{Z}_2^n) \supseteq A^3(\mathbb{Z}_2^n) \supseteq \dots$$

Эта последовательность векторных подпространств убывает. Пересечение всех этих подпространств я обозначу через  $A^\infty(\mathbb{Z}_2^n)$  (не заботясь, как и в случае пространства решений однородного уравнения, о смысле оператора  $A^\infty$ ).

Пространство  $A^\infty(\mathbb{Z}_2^n)$  имеет в терминах графа операции  $A$  простое описание: ему принадлежат в точности все точки всех циклов всех компонент (и только они), так как любая другая вершина графа, леса которого имеют высоту  $h$ , не имеет вершин выше себя больше чем на  $h$ , а потому не принадлежит образу оператора  $A^{h+1}$ .

Например, из всего этого следует, что сумма  $\sum$  длин всех циклов графа является степенью двойки (а именно  $2^q$ , если векторное пространство  $A^\infty(\mathbb{Z}_2^n)$  имеет размерность  $q$  над  $\mathbb{Z}_2$ ), что и наблюдается в нашей таблице:

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sum$	1	4	1	16	16	64	1	128	256	1024	256

Все утверждения теоремы 2 проверяются непосредственными вычислениями, и я не привожу этих вычислений в надежде, что слушатели (вооружённые, возможно, компьютерами) проведут их сами не только при  $n \leq 12$ , но и для гораздо больших периодов  $n$  периодических бинарных последовательностей.

### § 3. Логарифмическая функция и её сложность

Таблица показывает, что если  $n$  не степень двойки, то не всякая  $n$ -периодическая функция со значениями из  $\mathbb{Z}_2$  является «многочленом». В этом случае мы будем считать эти неполиномиальные функции от  $x$  «более сложными, чем все многочлены». При желании можно было бы продолжать иерархию функций нашего конечного функционального пространства (в котором всего  $2^n$  элементов) — рассмотреть экспоненты, синусы, квазимногочлены и т. п. и сравнивать их «сложности» (в зависимости, например, от того, какому простейшему дифференциальному уравнению они удовлетворяют).

Но я не буду сейчас этого делать, а рассмотрю одну специальную функцию — дискретный «теоретико-числовой логарифм» со значениями 0 и 1, который почему-то оказывается «очень сложной» в нашем смысле функцией.

Для определения этого арифметического логарифма я предположу, что  $n + 1 = p$  — нечётное простое число.

Пусть  $a$  — первообразный остаток от деления на  $p$ , т. е.  $a^{p-1} \equiv 1(p)$  и  $n$  остатков  $\{a, a^2, \dots, a^{p-1}\}$  доставляют все ненулевые остатки  $k$  от деления на  $p$ .

В случае, когда

$$a^l \equiv k \pmod{p},$$

мы будем называть число  $l$  (или лучше остаток от деления  $l$  на  $n = p - 1$ ) *арифметическим логарифмом  $l$  числа (или остатка)  $k$* :

$$l = \log_a k.$$

Мы определили функцию  $l$  аргумента  $k$ . Нужная нам функция  $L$  со значениями в  $\mathbb{Z}_2$  — это остаток от деления числа  $l$  на 2:

$$L(k) \equiv l(k) \pmod{2}.$$

Заметим, что, поскольку число  $p - 1$  чётно, значение  $L(k)$  однозначно определено (несмотря на то что  $l$  определено лишь как остаток от деления на  $p - 1$ ).

Мы будем рассматривать эти значения как бинарную последовательность длины  $p - 1 = n$ :

$$L(1), L(2), \dots, L(n).$$

Значение в точке  $k$  равно нулю, если и только если  $k \neq 0$  является квадратичным вычетом по модулю  $p$ , и равно 1, если  $k \neq 0$  является квадратичным невычетом.

Из этого видно, что наш «арифметический бинарный логарифм»  $L: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  не зависит от выбора того первообразного остатка  $a$ , при помощи которого мы его определили, а зависит лишь от числа  $n = p - 1$ .

Прямые вычисления расположения этой «логарифмической» функции в графах из теоремы 2 показывают, что *эта специальная функция оказывается либо максимально сложной* (среди всех бинарных функций периода  $n$ ), *либо почти максимально сложной* (в смысле сложности определённой нами геометрией графа операции взятия разности).

Эти вычисления, сами по себе не сложные, довольно длинные, и для описания их результатов мы будем задавать функцию  $L \in \mathbb{Z}_2^n$  двоичным числом  $X$  с цифрами  $L(k)$ :

$$X = L(1) \cdot 2^{n-1} + L(2) \cdot 2^{n-2} + \dots + L(n) \cdot 2^0 \pmod{2^n}.$$

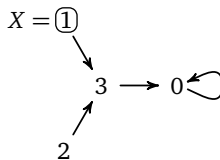
В простейшем случае  $p = 3$ ,  $n = 2$  логарифмическая функция  $L$  вычисляется при помощи геометрической прогрессии  $n$  остатков

$$\{2^l \pmod{3}\} = (2, 1).$$

Стало быть,  $l(2) = 1$ ,  $l(1) = 2$ , так что

$$L(1) = 0, \quad L(2) = 1, \quad X = 1 \pmod{4}.$$

Граф операции  $A$  имеет в случае  $n = 2$  вид



Точка  $X = 1$  — наиболее сложная бинарная функция периода 2, так как эта вершина дерева  $T_4$  удалена от цикла (корня 0) наиболее далеко.

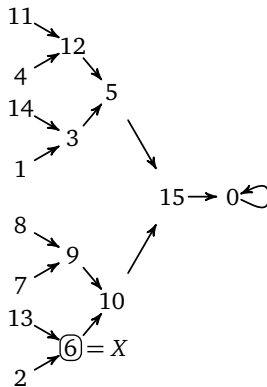
При следующих простых значениях ( $p = 5, 6, 11, 13$ ) вычисления совершенно аналогичны, но более длинные, и я приведу только их результаты.

**Теорема 3.** Арифметические логарифмы  $L$  доставляют в графах операции взятия разностей бинарных последовательностей периода  $n = p - 1$  вершины  $X$ , приведённые для  $p = 5, 7, 11$  и  $13$  в следующих таблицах.

При  $p = 7, 11$  это самые сложные бинарные функции периода  $n = p - 1$ , а при  $p = 5, 13$  — почти самые сложные (вершина  $X$  расположена в первом случае на наибольшем расстоянии от цикла, а во втором — на 1 ближе).

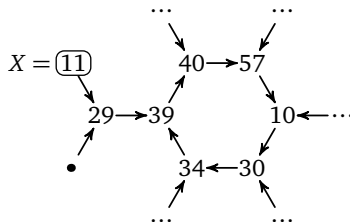
**Случай  $p = 5, n = 4$ .** Выбирая  $a = 2$ , находим  $l(1) = 0, l(2) = 1, l(3) = 3, l(4) = 2$ , откуда для «арифметического бинарного логарифма» получаем значение  $X = 6$ .

Нужная компонента графа имеет вид  $O_1 * T_{16}$ , а именно



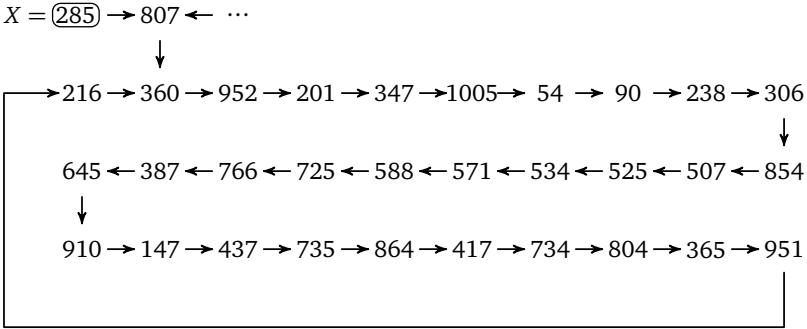
**Случай  $p = 7, n = 6$ .** Выбирая  $a = 3$ , приходим к арифметическому бинарному логарифму  $X = 11$ .

Нужная компонента графа имеет вид  $O_6 * T_4$ , и я выпишу только орбиту точки  $X$  в этом графе:



**Случай  $p = 11, n = 10$ .** Выбирая опять первообразный остаток  $a = 2$ , мы получаем геометрическую прогрессию  $(2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1) \pmod{11}$ , откуда  $L = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1), X = 285$ .

Соответствующая компонента имеет вид  $O_{30} * T_4$ , и я выпишу из её 120 точек только 32 вершины орбиты бинарного арифметического логарифма  $X$ :

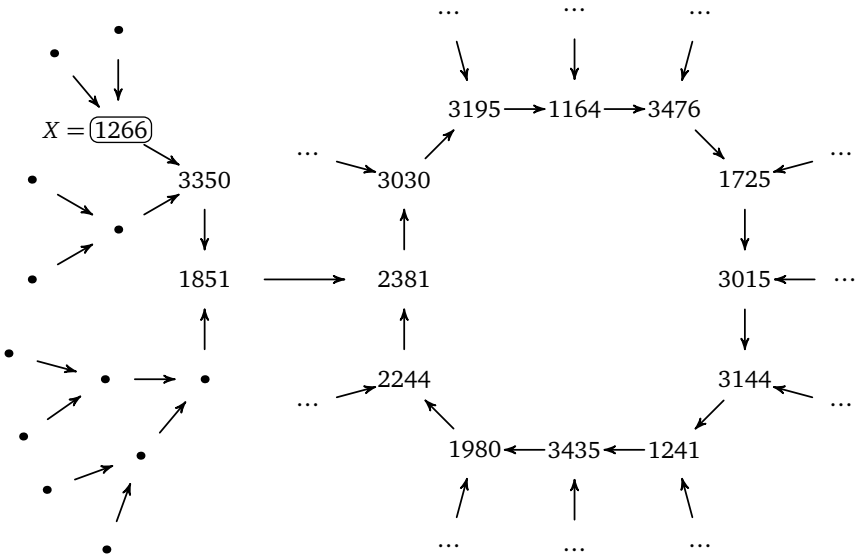


**Случай  $p = 13, n = 12$ .** Прimitивный остаток  $p = 2$  доставляет при  $k = (1, 2, \dots, 12)$  значения

$$\log_2 k = (12, 1, 4, 2, 5, 11, 3, 8, 10, 7, 6),$$

откуда для бинарного арифметического логарифма получается значение  $X = 1266$ .

Эта вершина принадлежит самой большой компоненте графа —  $O_{12} * T_{16}$ . Из 192 вершин этой компоненты в орбиту бинарного арифметического логарифма  $X$  попадает только 15 вершин:



Из этого вида компоненты следует, что бинарный арифметический логарифм периода 12 — почти самая сложная из бинарных функций периода 12. Эта вершина  $X$  принадлежит компоненте с наибольшим периодом цикла и в ней удалена от цикла на почти наибольшее расстояние (равное 3, в то время как самые верхушки оснащающего цикл леса удалены от цикла на расстояние 4).

Вся описанная выше теория остаётся пока эмпирической: ни её перенесение на случай  $n > 12$ , ни доказательства высказанных многочисленных гипотез (например, гипотезы о большой сложности бинарного арифметического логарифма при больших значениях  $n$ ) ещё не известны.

Кроме того, развитая здесь теория бинарных функций (со значениями в  $\mathbb{Z}_2$ ), т. е. последовательностей нулей и единиц, должна бы быть обобщена на случай функций с большим числом значений (например, для функций со значениями в  $\mathbb{Z}_p$  или в  $\mathbb{Z}_n$ ).

Это относится, например, к вопросу о сложности определённой выше функции  $l(k) = \log_a k$  аргумента  $k \in \mathbb{Z}_p \setminus 0$  со значениями в  $\mathbb{Z}_{p-1}$ , возникающими в ситуации малой теоремы Ферма: насколько беспорядочно (случайно) распределены логарифмы последовательных чисел (или, обратным образом, элементы геометрических прогрессий вычетов)?

## § 4. Сложность и случайность таблиц полей Галуа

Аналогичные вопросы о случайности возникают и в теории полей Галуа: поле  $\mathbb{Z}_p$  — один из примеров, общие поля Галуа имеют  $p^k$  элементов, например, поля из  $p^2$  элементов уже доставляют много случайных на вид таблиц, но их сложность не измерена пока никакой точно определённой мерой, а остаётся лишь эмпирически наблюдаемым фактом.

Вот пример такой «случайной» таблицы из  $p^2$  клеточек, заполненных числами от 1 до  $p^2$ .

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

— матрица второго порядка, элементы которой — остатки от деления на простое число  $p$ , обладающая тем свойством, что все  $p^2 - 1$  матрицы  $A^k$  ( $1 \leq k \leq p^2 - 1$ ) различны и  $A^{p^2-1} = 1$ .

Такое случается: для любого простого числа  $p$  такая матрица существует. Например, при  $p = 5$  годится матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$



В этом случае  $A^2 = \alpha A + \beta$  (в примере  $\alpha = 2, \beta = 2$ ), что позволяет легко вычислить  $A^3 = \alpha A^2 + \beta A = (\alpha^2 + \beta)A + \alpha\beta$  и т. д.,  $A^k = u_k A + v_k$  (где  $0 \leq u < p, 0 \leq v < p$ ).

Расположим число  $k$  в клеточке с координатами  $(v_k, u_k)$  таблицы размера  $p \times p$ . Полученные матрицы  $A^k$  (с добавлением матрицы 0, для  $k = \infty, u_\infty = v_\infty = 0$ ) образуют поле Галуа из  $p^2$  элементов. Операции в этом поле такие:  $A^k \cdot A^l = A^{k+l}, A^k + A^l = A^{k*l}$ , где  $*$  — операция сложения мест в таблице,  $v_{k*l} = v_k + v_l, u_{k*l} = u_k + u_l$ .

Символ  $A^\infty$  означает здесь нулевую матрицу. Таблица в случае  $p = 5$ , построенная по описанному правилу, имеет вид, изображённый на рис. 4.

Глядя на эти числа, можно убедиться, что они заполняют таблицу «случайным образом». При попытке проверить «частоты» различных событий, которые предсказывает «случайное» заполнение, получаются тем более близкие к ожидаемым результаты, чем больше  $p$ .

Можно предположить, что это асимптотически так для попадания первых  $N$  чисел таблицы в любую (не слишком сложно определяемую) область: ожидаемое число этих попаданий равно  $\theta N$ , если отношение площади области к площади таблицы составляет  $\theta$ .

Возьмём, например, первые  $N = 10$  из 25 значений ( $k = 1, \dots, 10$ ). Первые два столбца таблицы из 5 столбцов составляют  $\theta = 2/5$  её площади. Случайное заполнение заставляет ожидать  $(2/5)N$  попаданий. В таблице это значения  $k = 1, 8, 7, 10$  — их как раз 4. Столь точное совпадение числа попаданий с  $\theta N$  имеет место не всегда, но точность повышается с ростом таблицы, если область определена не слишком сложным алгоритмом.

Слушатели могут сами выбирать критерии «случайности» и экспериментально проверять их. Некоторое количество примеров имеется в моей статье «Геометрия и динамика полей Галуа» (Успехи матем. наук. 2004. Т. 59, № 6. С. 23–40) и в книжке «Динамика, статистика и проективная геометрия полей Галуа» (М.: МЦНМО, 2006).

Утверждение о том, что критерии стохастичности выполняются при  $p \rightarrow \infty$  в пределе точно, хорошо подтверждается экспериментами, но доказано далеко не всегда, и я рассказываю здесь о нём именно в надежде на помощь читателей в (хотя бы экспериментальном) исследовании этого вопроса.

13	15	5	16	20
7	10	9	14	23
19	11	2	21	22
1	8	4	17	3
$\infty$	24	18	6	12

Рис. 4. Таблица поля Галуа из 25 элементов

Следующий эксперимент относится к теории тасования карт. Мы сопоставим таблице поля Галуа из  $p^2$  элементов следующую перестановку  $p^2$  элементов.

Каждому номеру  $k$  ( $1 \leq k < p^2$ ) сопоставим адрес  $K = pu_k + v_k$  той клетки таблицы, где этот номер расположен. Например, в таблице, изображённой на рис. 4 получаем,  $K(1) = 5$ ,  $K(2) = 12$ , ...,  $K(20) = 24$ .

Гипотеза состоит в том, что эта перестановка столь же «случайна», как хорошая перетасовка колоды из  $p^2 - 1$  карты (качество тасовки улучшается при  $p \rightarrow \infty$ ).

При желании можно добавить ещё один элемент, переставляя все  $p^2$  элементов поля Галуа. Для этого надо заменить символ  $A^\infty$  на 0 (полагая  $k = p^2$  вместо  $\infty$ ), добавив адрес  $K = 0$  места, где стоит нулевая матрица.

Насколько «случайна» получающаяся перестановка  $p^2 = 25$  элементов поля Галуа, мы обсудим в следующей лекции.

Для полей Галуа из  $p^n$  элементов таблица поля заполняет  $n$ -мерный куб со стороной  $p$ . Она основана на выражении  $(n \times n)$ -матриц  $A^k$ , элементы которых — остатки от деления на  $p$ , в виде линейных комбинаций  $n$  матриц  $1, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ :

$$A^k = u_k A^{n-1} + v_k A^{n-2} + \dots + w_k A^{n-n}.$$

«Случайность» таблиц таких полей растёт при  $p \rightarrow \infty$  подобно тому, как это выше объяснено для  $n = 2$ . Слушатели могут сами проверить это экспериментально, хотя доказано это далеко не всегда.

Скажу ещё о соотношении «сложности» и «случайности», рассматривавшихся в настоящей лекции, со сложностью и случайностью, определяемыми совершенно иначе в теории алгоритмов и в теории вероятностей.

Статистическая точка зрения на эти понятия состоит в том, что общие статистические законы (вроде «закона больших чисел» о стремлении частот успеха в повторяющихся испытаниях к вероятности успеха в одном испытании) выполняются лишь для большинства последовательных испытаний.

Большинство изучаемых нами последовательностей тоже «сложны» в нашем смысле, потому что большая часть вершин соответствующего графа расположена на компонентах с длинными циклами, и притом на верхних ветвях оснащающих эти циклы деревьев.

Гипотеза состоит, однако, в том, что критерии стохастичности выполняются (с тем большей точностью, чем больше длина  $n$  рассматриваемых последовательностей) не только для типичных после-

довательностей (т. е. для большинства их), но и для нетипичных последовательностей, которые «сложны» в нашем смысле.

Некоторые статистически «типичные» объекты могут оказаться не сложными в нашем смысле, но они предположительно составляют малую долю всех (как и статистически нетипичные «сложные» в нашем смысле последовательности, если они существуют).

Можно также предполагать, что конечные модели алгоритмически невычислимых последовательностей окажутся, как правило, более сложными в нашем смысле, чем аналогичные конечные модели алгоритмически вычислимых последовательностей.

Но эта гипотеза не только не доказана, но и не сформулирована пока достаточно точно, чтобы её можно было пытаться доказывать (и формулировки, и доказательства я ожидаю от слушателей, которым для того о них и рассказывал).

Многие математики считают, что понять теорему можно, только обобщив её, чтобы найденные закономерности оказались распространёнными на более широкий круг явлений.

Поэтому я не остановился на описанной выше теории сложности последовательностей двоичных цифр, а провёл аналогичные эксперименты для последовательностей, состоящих из иных объектов, например для тернарных последовательностей, состоящих из остатков от деления на 3 (т. е. заменил остатки  $\{0, 1\}$  от деления на 2 остатками  $\{0, 1, 2\}$  от деления на 3).

Вот простейшие результаты этих экспериментов (относящиеся к последовательностям из  $n \leq 7$  знаков, составляющим множество из  $3^n$  элементов).

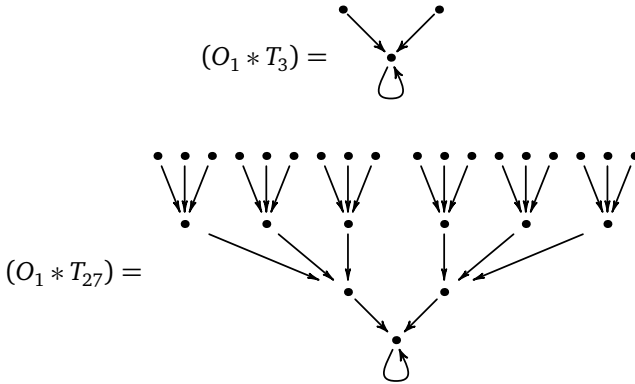
Оператор  $A = \delta - 1: \mathbb{Z}_3^n \rightarrow \mathbb{Z}_3^n$  действует по прежней формуле

$$(A_x)_k = x_{k+1} - x_k \quad (\text{где } x_{n+1} = x_1).$$

Прямое вычисление графов этих операторов приводит к следующей таблице ответов:

$n$	$b$	Компоненты графа	Соотношение
2	1	$(O_1 * T_3)$	$A^2 = A$
3	1	$(O_1 * T_{27})$	$A^3 = 0$
4	6	$3(O_8 * T_3) + 3(O_1 * T_3)$	$A^9 = A$
5	2	$(O_{80} * T_3) + (O_1 * T_3)$	$A^{81} = A$
6	11	$8(O_3 * T_{27}) + 3(O_1 * T_{27})$	$A^6 = A$
7	3	$2(O_{364} * T_3) + (O_1 * T_3)$	$A^{365} = A$

В тернарных деревьях ( $T_3$  и  $T_{27}$ ) каждая вершина, кроме самых верхних, имеет 3 прообраза:



Я предоставляю читателю перенести на случай остатков от деления на  $p$  предыдущие теоремы о бинарных последовательностях, например, исследовав «дерево многочленов»  $(O_1 * T_{3^k})$  в каждой компоненте предыдущей таблицы.

Период  $T = 3$  самого длинного цикла графа операции  $A: \mathbb{Z}_3^6 \rightarrow \mathbb{Z}_3^6$  (в случае  $n = 6$ ) не делится на  $n$ , так что обобщение соответствующего свойства бинарных последовательностей не тривиально.

Случай  $n = 7$  нашей таблицы явно связан с астрономией года из  $364 = (2^6 - 1)/2$  дней и  $364/28 = 13$  месяцев.

Дубнинская лекция 2005 года породила продолжающие её исследования О. Карпенкова и А. Гарбера. Последний, в частности, обнаружил, что если  $n = p - 1$  не делится на 8, то «логарифм» сложен (например, для  $p = 4k + 3$ ), но для  $p = 73$  «логарифм» принадлежит циклу. О. Карпенков обнаружил, что дробь  $T/n$  — не всегда уменьшенная на 1 степень двойки. Например, для  $n = 23$  имеем  $T = 2047$ ,  $T/n = 89$ . Я надеюсь, что все эти результаты будут вскоре опубликованы. См также: *Arnold V. Complexity of finite sequences of zeros and ones and geometry of finite spaces of functions // Functional Analysis and other mathematics. 2006. V. 1, № 1. P. 1–18.*

## Лекция 3

# Случайные перестановки и диаграммы Юнга их циклов

Каждый считает себя экспертом в том,  
что знает хуже всего.

*О. Уайльд*

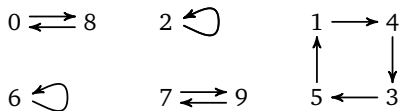
Опубликованный манускрипт подобен  
публичной женщине.

*Дж. Свифт (согласно В. Набокову)*

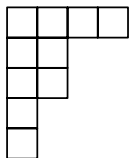
Каждая перестановка  $n$  элементов разбивается на циклы. Например, для следующей перестановки, переводящей цифру  $x$  в цифру  $y$ :

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y$	8	4	2	5	3	1	6	9	0	7

циклов 5, а именно



Таким образом, получается разбиение числа  $n$  на длины циклов:  
10  
слагаемые обычно изображаются своей «диаграммой Юнга», имеющей в нашем примере вид



Для разбиения

$$n = x_1 + \dots + x_y, \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_y,$$

в первой строчке диаграммы Юнга стоят  $x_1$  единичных квадратов, во второй  $x_2$  и т. п. до самой короткой из  $y$  строк.

Числа  $x_1$  и  $y$  называются *длиной* и *высотой* диаграммы. Диаграмма Юнга разбиения десяти цифр на циклы нашей перестановки имеет, таким образом, длину  $x = 4$  и высоту  $y = 5$ . Она заполняет в описанном вокруг неё прямоугольнике (со сторонами  $x$  и  $y$ ) площадь  $n$  и долю

$$\lambda = \frac{n}{xy}$$

(в нашем примере  $\lambda = 10/20 = 1/2$ ). Значение  $\lambda$  я буду называть *полнотой* диаграммы.

В этой лекции мы исследуем диаграммы Юнга некоторых специальных перестановок.

Всего перестановок  $n$  элементов имеется  $n!$  штук, и интересно, какие диаграммы Юнга разбиения  $n$  на циклы встречаются среди этих  $n!$  «случайных» перестановок чаще, а какие реже: каковы в среднем длина, ширина, полнота диаграммы Юнга, что обычно больше, длина или ширина?

При небольших  $n$  эти вопросы можно решить, перечислив все диаграммы Юнга площади  $n$  всех  $n!$  перестановок, но их число  $p_n$  с ростом  $n$  становится большим:

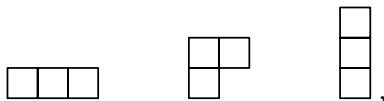
$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_n$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

При больших значениях  $n$  проще пойти путём эвристического эксперимента: создать искусственно одну «случайную» перестановку  $n$  элементов (скажем, с  $n = 100$ ) и сосчитать её диаграмму Юнга (предполагаю, что диаграммы Юнга большинства из  $100!$  перестановок 100 элементов похожи между собой, что, конечно, вовсе не очевидно, как не очевидна и типичность искусственно созданной перестановки). Для проверки типичности стоит повторить эксперимент несколько раз и сравнить, похожи ли ответы.

Кроме того, мы сравним «случайные» перестановки с доставляемыми алгеброй и теорией чисел перестановками точек в динамических системах с конечным фазовым пространством (что моделирует также конечные циклы периодических точек в динамических системах с дискретным временем).

## § 1. Статистика диаграмм Юнга перестановок небольшого числа элементов

При небольших  $n$  не составляет труда перечислить все разбиения  $n$  на натуральные слагаемые. Например, при  $n = 3$  их всего 3, с диаграммами Юнга



а именно  $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ .

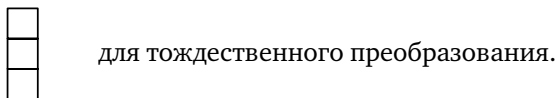
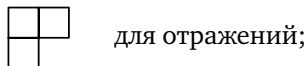
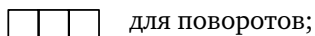
Для сокращения обозначений я буду записывать разбиение  $n = x_1 + \dots + x_y$  в виде «одночлена»  $a^\alpha b^\beta \dots$ ,  $a > b > \dots$ , если наибольшее слагаемое  $x_1 = a$  повторено в разбиении  $\alpha$  раз, следующее по величине —  $\beta$  раз и т. д.

Три перечисленных разбиения числа  $n = 3$  соответствуют одночленам  $D = 3$ ,  $2.1$  и  $1^3$  (показатель 1 не указывается).

Группа  $S(3)$  из шести перестановок трёх элементов может рассматриваться как группа симметрий правильного треугольника (переставляющая его три вершины).

Она состоит из тождественного преобразования, двух поворотов (на  $120^\circ$  и  $240^\circ$ ) третьего порядка и трёх симметрий второго порядка (отражений относительно высот треугольника).

Диаграммы Юнга этих преобразований имеют соответственно вид



Мы запишем эти выводы в виде таблицы.

**Случай  $n = 3$ .** Классы сопряжённых элементов симметрической группы  $S(3)$  (симметрий правильного треугольника).

$D$	3	2.1	$1^3$
$x$	3	2	1
$y$	1	2	3
$N$	2	3	1

В строке  $N$  указано число перестановок с данной диаграммой Юнга  $D$ . Все эти перестановки при данной диаграмме Юнга «одинаковы» (подобны в группе  $S(n)$  перестановок  $n$  элементов) и различаются только обозначениями переставляемых элементов: они «неразличимы с релятивистской точки зрения».

Общее число всех перестановок есть сумма по всем диаграммам площади  $n$ :  $n! = \sum_D N(D)$ , так как каждая перестановка единственным образом разбивается на циклы.

Подсчитать число  $N(D)$  представлений перестановками для данной диаграммы Юнга  $D$  — элементарная комбинаторная задача, нужно только указать число способов расставить символы  $(1, 2, \dots, n)$  в клетках диаграммы Юнга, приводящих к разным перестановкам.

Для диаграммы из одного цикла длины  $n$  (где  $D = n$ ) число разных перестановок составляет  $N(n) = (n - 1)!$ , например  $N(4) = 6$ .

Действительно, в цикле после обязательно входящего в него элемента 1 следует один из остальных  $n - 1$  элементов, затем — один из оставшихся  $n - 2$  элементов и т. д., так что число всех разных циклических перестановок множества из  $n$  элементов равно

$$(n - 1)(n - 2) \dots = (n - 1)!.$$

Слушатели легко смогут сами доказать результаты о перестановках  $n \leq 7$  элементов, аналогичные приведённой выше для  $n = 3$  таблице.

**Теорема 1.** *Разбиения групп  $S(n)$  перестановок  $n$  элементов на классы сопряжённых элементов (с диаграммами Юнга длины  $x$  и высоты  $y$  для  $N(D)$  сопряжённых друг другу перестановок) доставляются при  $n \leq 7$  следующими таблицами.*

**Случай  $n = 4$ .** *Классы сопряжённых элементов симметрической группы  $S(4)$  (симметрий тетраэдра).*

$D$	4	3.1	$2^2$	$2.1^2$	$1^4$
$x$	4	3	2	2	1
$y$	1	2	2	3	4
$N$	6	8	3	6	1

Столбец  $N(2^2) = 3$  соответствует трём осям симметрии тетраэдра, соединяющим середины противоположных (скрещивающихся) рёбер. Эти три симметрии тетраэдра вместе с его тождественным преобразованием образуют замечательную коммутативную подгруппу  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \subset S(4)$ , благодаря которой алгебраические уравнения степени 4 решаются в радикалах.



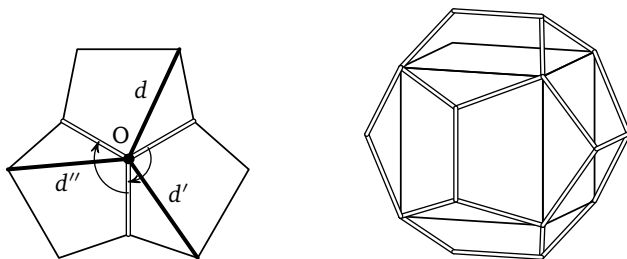
**Случай  $n = 5$ .** Классы сопряжённых элементов симметрической группы  $S(5)$ .

$D$	5	4.1	3.2	$3.1^2$	$2^2.1$	$2.1^3$	$1^5$
$x$	5	4	3	3	2	2	1
$y$	1	2	2	3	3	4	5
$N$	24	30	20	20	15	10	1

Эта таблица доставляет всю геометрию группы симметрий додекаэдра с его 12 гранями, 20 вершинами и 30 рёбрами.

Каждая грань порождает два циклических вращения пятого порядка, каждая вершина — сохраняющие её вращения порядка 3, каждое ребро — сохраняющее пару противоположных рёбер вращение порядка 2.

Чтобы интерпретировать симметрии додекаэдра как перестановки 5 элементов, Кеплер вписал в додекаэдр пять кубов, рёбра которых являются диагоналями граней додекаэдра. Вот как он их строил (рис. 1).



**Рис. 1.** Вписанный в додекаэдр куб Кеплера

Выбрав диагональ  $d$  одной из граней, можно провести через её концевую вершину  $O$  две диагонали  $d'$ ,  $d''$  двух соседних граней, получающиеся из выбранной диагонали сохраняющими упомянутую вершину вращениями додекаэдра. Полученные три диагонали граней ортогональны друг другу.

Повторяя эту конструкцию в свободных концах уже полученных трёх диагоналей граней додекаэдра, мы будем строить новые диагонали граней, пока построенные 12 диагоналей граней не составят куб (имеющий по ребру на каждой из 12 граней додекаэдра).

В зависимости от того, с какой из пяти диагоналей исходной грани началась эта конструкция, получатся пять разных вписанных в додекаэдр кубов Кеплера, которые и переставляются группой симметрий додекаэдра.

**Случай  $n = 6$ .** Классы сопряжённых элементов симметрической группы  $S(6)$ .

$D$	6	5.1	4.2	4.1 <sup>2</sup>	3 <sup>2</sup>	3.2.1	3.1 <sup>3</sup>	2 <sup>3</sup>	2 <sup>2</sup> .1 <sup>2</sup>	2.1 <sup>4</sup>	1 <sup>6</sup>
$x$	6	5	4	4	3	3	3	2	2	2	1
$y$	1	2	2	3	2	3	4	3	4	5	6
$N$	120	144	90	90	40	120	40	15	45	15	1

**Случай  $n = 7$ .** Классы сопряжённых элементов симметрической группы  $S(7)$ .

$D$	7	6.1	5.2	5.1 <sup>2</sup>	4.3	4.2.1	4.1 <sup>3</sup>	
$N$	720	840	504	504	420	630	210	
$D$	3 <sup>2</sup> .1	3.2 <sup>3</sup>	3.2.1 <sup>2</sup>	3.1 <sup>4</sup>	2 <sup>3</sup> .1	2 <sup>2</sup> .1 <sup>3</sup>	2.1 <sup>5</sup>	1 <sup>7</sup>
$N$	280	210	420	70	105	105	21	1

Докажем, например, что  $N(3^2.1) = 280$ . Цикл длины 1 может составляться любым из 7 элементов и определён перестановкой с диаграммой  $D = 3^2.1$  однозначно. Остающиеся 6 элементов нужно разбить на два цикла по 3 элемента. Одна тройка выбирается  $C_6^3 = 20$  способами, но разных разбиений получается 10, так как неизвестно, которая из двух троек первая.

Если разбиение фиксировано, то остаётся выбрать циклический порядок в каждой из троек (независимо от другой). Циклических порядков  $m = 3$  элементов имеется  $(m - 1)! = 2$ . Поэтому разных выборов циклических порядков в обеих тройках  $2 \cdot 2 = 4$ , а всего нужных перестановок данных 6 элементов получается  $4 \cdot 10 = 40$ .

Учитывая произвольность седьмого неподвижного при перестановке элемента, получаем, что общее число перестановок с диаграммой  $D = 3^2.1$  равно произведению  $40 \cdot 7 = 280$ .

Остальные элементы таблицы вычисляются аналогично.

Приведённые таблицы позволяют вычислить (при  $n \leq 7$ ) для любой функции  $f$  от диаграммы Юнга  $D$  площади  $n$  её среднее значение  $\hat{f}$  по всем  $n!$  перестановкам  $n$  элементов:

$$\hat{f}(n) = \sum_D \frac{N(D)f(D)}{n!}.$$

**Теорема 2.** Средние значения характеристик диаграмм (длины  $x$ , высоты  $y$ , полноты  $\lambda = n/(xy)$ , асимметрии  $\mu = y/x$ ) имеют при  $n \leq 7$  следующие значения:

$n$	$\hat{x}$	$\hat{y}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\mu}$
2	$\frac{3}{2} = 1,50$	$\frac{3}{2} = 1,50$	1,00	$\frac{5}{4} = 1,25$
3	$2\frac{1}{6} \approx 2,17$	$1\frac{5}{6} \approx 1,83$	$\frac{7}{8} \approx 0,88$	$\frac{10}{9} \approx 1,11$
4	$2\frac{19}{24} \approx 2,79$	$2\frac{1}{12} \approx 2,08$	$\frac{29}{36} \approx 0,80$	$\frac{137}{144} \approx 0,95$
5	$3\frac{17}{40} \approx 3,43$	$2\frac{17}{60} \approx 2,28$	$\frac{325}{432} \approx 0,75$	$\frac{184}{225} \approx 0,82$
6	$4\frac{31}{720} \approx 4,04$	$2\frac{17}{30} \approx 2,57$	$\approx 0,72$	$\approx 0,76$
7	$\approx 4,68$	$\approx 2,71$	$\approx 0,69$	$\approx 0,70$

Хотя эта статистика получена лишь при довольно небольших значениях  $n$ , она подсказывает целый ряд предположений.

Например, можно предполагать, что средняя длина диаграммы растёт с ростом её площади  $n$  приблизительно линейно,  $\hat{x} \sim c_1 n$  (таблица подсказывает значение коэффициента  $c_1$ , близкое к  $2/3$ ).

Напротив, средняя высота диаграммы растёт с её площадью гораздо медленнее, предположительно даже  $\hat{y} \sim x_2 \ln n$  (высота примерно удваивается при возведении  $n$  в квадрат).

Средний коэффициент заполнения прямоугольника диаграммой медленно убывает с ростом площади  $n$ , таблица подсказывает его поведение типа

$$\hat{\lambda} \sim \frac{c_3}{\ln n}$$

(с уменьшением коэффициента заполнения примерно вдвое при возведении площади  $n$  в квадрат).

Величина средней асимметрии  $\mu$  убывает в том смысле, что по мере роста площади  $n$  типичные диаграммы уплотняются и становятся всё более низкими и длинными.

Однако квадратичное среднее значение логарифма асимметрии  $\mu$  составляет  $\sigma \approx 0,30$  при  $n = 2$  и вырастает до  $\sigma \approx 0,42$  при  $n = 7$ . Этот рост величины  $\sigma$  показывает, что довольно значительная асимметрия сохраняется у значительной доли диаграмм и при большой площади  $n$ , т. е. что диаграммы не все становятся при росте площади более симметричными, а напротив, достигают большего разнообразия форм, включающего и длинные диаграммы с  $\mu < 1$ , и высокие диаграммы с  $\mu > 1$  (какая из этих двух асимметрий имеет место, средняя квадратичная величина  $\sigma$  не различает).

## § 2. Экспериментирование со случайными перестановками большого числа элементов

Хотя компьютерные вычисления могли бы продолжить вычисление средних характеристик диаграмм Юнга перестановок при больших, чем в § 1, значениях  $n$ , эти вычисления, требующие суммирования по всем  $n!$  перестановкам  $n$  элементов, останутся нереальными (даже с использованием компьютеров) при таких, например, значениях  $n$ , как 100: 100! слагаемых сложить не удастся.

Поэтому я изобрёл другой (скорее естественно-научный, чем математический) подход к этой задаче: вместо суммирования по всем 100! перестановкам я реализовал одну перестановку сотни элементов, выбрав её действительно случайным образом и рассматривая характеристики её диаграммы Юнга разбиения числа  $n = 100$  на длины циклов как типичные характеристики диаграммы площади  $n$  «случайной» перестановки.

Мой способ построения «случайной» перестановки  $n$  элементов был таким (я опишу его ниже для  $n = 100$ , чтобы упростить обозначения).

Начнём с какой-либо последовательности случайных цифр. Ниже я опишу несколько источников таких последовательностей: использовались телефонные номера членов Национальной академии наук США в одном случае и номера автомобилей, проезжавших на улице Вавилова мимо Математического института Российской академии наук, в другом, и результаты получились сходные.

Если в случайной последовательности цифр  $\alpha \beta \gamma \delta \dots$  рассматривать  $(\alpha \beta)$  как двузначное число, то мы начинаем перестановку (т. е. упорядочение) всех 100 двузначных чисел  $(00, 01, \dots, 99)$  с числа  $(\alpha \beta)$ . Если число  $(\gamma \delta)$  отлично от  $(\alpha \beta)$ , то мы поставим его вторым членом переставленной последовательности двузначных чисел, а если нет, то пропустим его и перейдём к следующему числу  $(\epsilon \zeta)$ . И так далее: если несколько первых членов переставленной последовательности уже выбраны, то в качестве следующего её элемента будет браться первая из последующих пар членов исходной последовательности случайных цифр, которая отлична от всех уже выбранных пар.

Этот алгоритм создаёт в конце концов случайную перестановку всех 100 двузначных чисел. Но по мере приближения к концу он работает всё медленнее и медленнее, так как до встречи нового (ещё не выбиравшегося) двузначного числа приходится долго двигаться среди уже повторяющихся кандидатов, испытывая их на новизну одно за другим.

А именно, если бы мы переставляли  $n$  элементов, то число кандидатов, которые пришлось бы рассматривать, было бы, как это объяснено ниже, порядка  $n \ln n$ . Для  $n = 100$  получаем  $\ln 100 \approx 4,6$ , т. е. нужно располагать таблицей примерно 500 случайных двузначных чисел.

Список академиков для этого достаточно велик, и я выбирал в качестве «случайных» двузначных чисел пары цифр, образованные четвёртой и пятой цифрами семизначного телефонного номера академиков (упорядоченных в справочнике по алфавиту).

В следующем протоколе такого эксперимента подряд выписаны выбранные двузначные числа, а отвергнутые кандидаты заключены в скобки. В этом эксперименте в 100 попытках выбрано 64 двузначных числа, и частота повторяющихся кандидатов в конце работы сильно её тормозит.

47	99	07	32	02	91	52	66	21	81	27	82	70
43	17	65	76	28	63	08	94	11	01	95	(52)	(76)
87	(65)	29	16	20	80	10	25	37	(65)	(32)	35	(21)
74	05	36	48	(24)	73	(48)	90	18	75	12	(02)	15
41	72	38	61	(73)	(73)	(63)	(11)	24	83	56	(32)	(74)
06	84	(56)	(81)	67	14	03	(83)	(56)	96	(48)	(27)	(37)
97	(08)	(37)	89	(02)	(97)	(38)	(52)	44	19	(24)	(28)	(12)
(01)	13	69	(20)	(17)	(84)	88	53	(61).				

Чтобы бороться с этим замедлением в конце выбора, я изобрёл ещё несколько усовершенствований. Во-первых, можно вместо  $n$  выбрать только  $n/2$  элементов, а потом из оставшихся  $n/2$  кандидатов выбрать  $n/2$  элементов тем же приёмом. Например, можно как-либо биективно отобразить оставшееся множество на уже готовые  $n/2$  переставленных элементов, а затем упорядочить их при помощи уже готового упорядочения  $n/2$  выбранных элементов.

Другой способ состоит в том, чтобы использовать в качестве новой таблицы случайных двузначных чисел (для второй половины упорядочения) не исходную последовательность  $(\alpha\beta)(\gamma\delta) \dots$ , а последовательность  $(\beta\gamma)(\delta\varepsilon) \dots$ .

Третий способ состоит в использовании для упорядочения  $m = 100/k$  элементов последовательность остатков от деления исходных случайных двузначных чисел  $(\alpha\beta), (\gamma\delta), \dots$  на делитель  $m$  числа 100.

Каждый из этих способов позволяет быстро «случайно» упорядочить все  $n = 100$  двузначных чисел, что и задаёт нужную «случайную» перестановку множества из  $n$  элементов.

При  $n = 16$  я получил таким путём из случайной последовательности остатков от деления на 16 следующую перестановку элементов  $\{0, 1, \dots, 15\}$ :

0 4 3 12 9 8 7 14 5 1 2 11 6 15 10 13.

Соответствующие перестановке циклы легко вычислить:

0  $\rightarrow$  (0) длины 1;

1  $\rightarrow$  4  $\rightarrow$  9  $\rightarrow$  (1) длины 3;

2  $\rightarrow$  3  $\rightarrow$  12  $\rightarrow$  6  $\rightarrow$  7  $\rightarrow$  14  $\rightarrow$  10  $\rightarrow$  (2) длины 7;

5  $\rightarrow$  8  $\rightarrow$  (5) длины 2;

11  $\rightarrow$  (11) длины 1;

13  $\rightarrow$  15  $\rightarrow$  (13) длины 2.

Итак, диаграмма Юнга нашей «случайной» перестановки 16 элементов есть  $D = 7.3.2^2.1^2$ .

Параметры этой диаграммы имеют значения

$$x = 7, \quad y = 6, \quad \lambda = \frac{16}{42} \approx 0,38, \quad \mu = \frac{6}{7} \approx 0,86.$$

Они удовлетворительно укладываются в гипотетическое поведение средних характеристик, предсказанное на с. 133 на основании таблиц, где число элементов было  $n \leq 7$ .

*Замечание.* Выражение  $n \ln n$  для числа наших попыток случайно упорядочить  $n$  элементов имеет следующее эвристическое объяснение.

Последний из  $n$  выбираемых элементов встречается при продолжении нашей случайной последовательности с вероятностью  $1/n$ , так что его появление ожидается в среднем после  $n$  попыток.

Для выбора предпоследнего элемента удачей будет встреча любого из двух ещё не выбранных элементов из  $n$  возможных. Ожидаемое число попыток, стало быть, есть  $n/2$ .

Выбор предыдущего элемента потребует в среднем  $n/3$  попыток, и т. д. Итого общее число попыток ожидается в среднем такое:

$$n \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \sim n \ln n \Big|_1^n \sim n \ln n$$

(мы использовали соотношение  $\int \frac{dx}{x} = \ln x$ ).

Сходное эвристическое рассуждение показывает, почему число циклов у перестановки  $n$  элементов ожидается порядка  $c_2 \ln n$ .

Естественно думать, что в случайной последовательности независимых выборов из  $n$  элементов первое повторение наступит после  $cn$  попыток, где  $c$  — некоторая константа. Это даёт ожидаемую длину  $cn$  первого цикла.

С этого момента выбор производится из  $n_1 \equiv n - cn = (1 - c)n$  кандидатов. Это подсказывает для второго цикла ожидаемую длину  $cn_1$ , и после его создания останется  $n_2 = (1 - c)n_1 = (1 - c)^2 n$  кандидатов.

Таким же образом, после создания  $y$  циклов число оставшихся кандидатов будет  $n_y = (1 - c)^y n$ .

Но вся процедура заканчивается при  $n_y$  порядка 1. Это соотношение доставляет для числа циклов  $y$  следующее выражение:

$$y \ln(1 - c) + \ln n \approx 0, \quad y \approx \frac{\ln n}{\ln(1 - c)^{-1}} \sim c_2 \ln n.$$

Проделав довольно много подобных экспериментов, я получил следующие диаграммы Юнга «случайных» перестановок  $n$  элементов:

$n$	$D$	$x$	$y$	$\lambda$	$\mu$
16	7.3.2 <sup>2</sup> .1 <sup>2</sup>	7	6	0,38	0,86
25	9.7.5.3.1	9	5	0,56	0,56
64	35.15.7.3.2.1 <sup>2</sup>	35	7	0,26	0,20
100	42.36.18.2.1 <sup>2</sup>	42	6	0,40	0,14
100	90.4.3.2.1	90	5	0,22	0,06
100	88.9.1 <sup>3</sup>	88	5	0,23	0,06
169	147.13.8.1	147	4	0,29	0,03

Все эти характеристики эмпирически «случайных» перестановок удовлетворительно согласуются с гипотезами, приведёнными на с. 133. Но, конечно, дальнейшая экспериментальная проверка (особенно с большими значениями  $n$ ) была бы очень желательна, с одной стороны, и не требует практически никаких предварительных знаний и доступна школьникам — с другой.

Всё же я повёл ещё одну независимую проверку, используя как источник случайных перестановок таблицу полей Галуа из  $p^2$  элементов.

### § 3. Случайные перестановки $p^2$ элементов, порождённые полями Галуа

Построение этих перестановок объяснено в § 4 лекции 2. Напомним, что поле Галуа из  $p^2$  элементов состоит из матриц

$$0 \text{ и } A^k, \quad 1 \leq k < p^2, \quad \text{где } A^k = u_k A + v_k;$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  — матрица, элементы которой являются остатками от деления на простое число  $p$ , удовлетворяющая соотношениям

$$A^{p^2-1} = 1, \quad A^{k < p^2-1} \neq 1.$$

Перестановка множества из  $p^2$  элементов,  $1 \leq k \leq p^2$ , определяется этим полем так: элементу  $k < p^2$  сопоставляется адрес  $K = u_k p + v_k$  матрицы  $A^k = u_k A + v_k$  в таблице поля, а для  $k = p^2$  полагаем  $K = 0$  (так что  $u_{p^2} = v_{p^2} = 0$ ).

Заметим, что адреса элементов таблицы поля пробегают множество

$$0 \leq K \leq (p-1)p + (p-1) = p^2 - 1$$

из  $p^2$  точек (так что мы можем истолковывать и  $k$ , и  $K$  как остатки от деления на  $p^2$ ).

Отображение  $k \rightarrow K$  является перестановкой этого множества из  $p^2$  элементов, и мы можем применить к этой перестановке предыдущую теорию: разложить её на циклы, построить диаграмму Юнга, найти её характеристики — длину  $x$ , высоту  $y$ , полноту  $\lambda$ , асимметрию  $\mu$ .

Сделав эти вычисления при  $p \leq 13$ , я получил удивительно похожие на диаграммы Юнга случайных перестановок ответы, приведённые в следующей таблице.

**Теорема 3.** *Диаграммы Юнга перестановок таблиц полей Галуа из  $p^2$  элементов таковы:*

$p$	$n$	$D$	$x$	$y$	$\lambda$	$\mu$
3	9	6.2.1	6	3	0,50	0,50
5	25	14.5.4.1 <sup>2</sup>	14	5	0,36	0,36
7	49	16.11.7.6.4.3.1 <sup>2</sup>	16	8	0,38	0,50
11	121	65.39.5.3 <sup>3</sup> .2.1	65	8	0,25	0,12
13	169	98.55.12.2.1 <sup>2</sup>	98	6	0,29	0,06

Сравнение этой таблицы с предыдущей таблицей можно считать подтверждением гипотезы о том, что таблицы полей Галуа обладают, особенно при больших  $p$ , статистическими свойствами таблиц случайных чисел (например, что задаваемые этими таблицами перестановки элементов поля обладают свойствами типичных случайных перестановок).

Для этого вывода нет, кроме приведённых эмпирических данных, никаких теоретических оснований, и это явилось одной из причин, почему я включил описание этих экспериментов в настоящие лекции.

С другой стороны, приведённая таблица доставляет новый довод в пользу гипотез для случайных перестановок, приведённых на с. 133 (если мы согласимся считать перестановку, заданную таблицей поля Галуа, случайной).



## § 4. Статистика циклов автоморфизмов Фибоначчи

В качестве ещё одного алгебраического примера перестановок конечных множеств мы рассмотрим периодические точки специальных динамических систем на двумерном торе — так называемых гиперболических автоморфизмов.

Аutomорфизм тора  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  задаётся целочисленной матрицей  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  с определителем 1. Линейное преобразование  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  переводит решётку целочисленных векторов  $\mathbb{Z}^2$  в себя, а потому диффеоморфизм переводит в себя и тор.

Периодические точки этого автоморфизма (который мы будем по-прежнему обозначать  $A$ ) — это решения уравнений

$$A^k x = x \quad (\in T^2).$$

Мы будем предполагать, что они изолированы, т. е. что

$$\det(A^k - 1) \neq 0.$$

В этом случае периодические точки принадлежат конечным торам

$$M \simeq \mathbb{Z}_n^2,$$

состоящим из точек с рациональными координатами

$$z = (z_1, z_2), \quad z_j = u_j/n, \quad u_j \in \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}).$$

Число таких точек (с данным знаменателем  $n$ ) конечно:  $|\mathbb{Z}_n^2| = n^2$ .

Отображение  $A$  переставляет точки конечного множества  $M$ , и эта перестановка разбивается на циклы.

Мы собираемся теперь исследовать диаграммы Юнга этих разбиений.

Рассмотрим специальный *автоморфизм Фибоначчи* (связанный также с золотым сечением), соответствующий матрице  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ :

$$A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1 + z_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Чтобы упростить обозначения, мы можем умножить (дробные) координаты на общий знаменатель  $n$ , т. е. считать компоненты  $z_1$  и  $z_2$  остатками от деления на  $n$ :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in M = \mathbb{Z}_n^2.$$

Диаграмма Юнга автоморфизма  $A: M \rightarrow M$  конечного тора  $M$  в себя имеет площадь  $n^2$ , и мы собираемся исследовать её форму для автоморфизма Фибоначчи при разных  $M$ .

*Замечание.* Автоморфизм  $A$  я называю автоморфизмом Фибоначчи, потому что он действует на базисные векторы следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 55 \\ 34 \end{pmatrix} \mapsto \dots$$

Компоненты этих векторов образуют последовательность Фибоначчи  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ , а их отношения стремятся к золотому сечению  $(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0,6$  (так как собственные числа матрицы  $A$  равны  $(3 \pm \sqrt{5})/2$ ).

Говорят также, что диффеоморфизм  $A: T^2 \rightarrow T^2$  готовит из кошки окрошку, так как образ вложенной в  $T^2$  кошки  $C$  становится после применения нескольких итераций сохраняющего площади отображения  $A$  «размазанным по тору» очень равномерно (рис. 2).

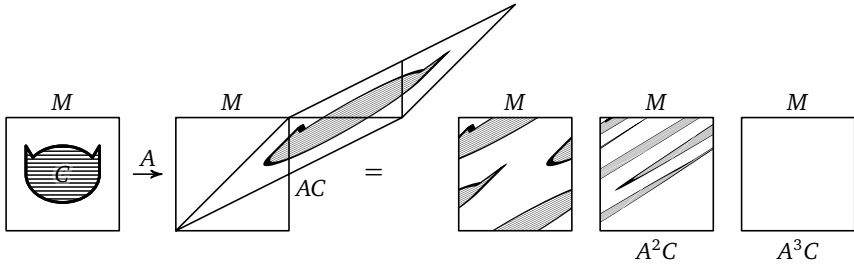


Рис. 2. Приготовление окрошки из кошки

Прямым подсчётом итераций отображения  $A$  доказывается следующая теорема.

**Теорема 4.** Диаграммы Юнга  $D$  действия автоморфизма Фибоначчи (1) на конечные торы  $\mathbb{Z}_n^2$  при  $n \leq 20$  имеют следующие параметры:

$n$	$D$	$x$	$y$	$\lambda \approx$	$\mu \approx$
2	3.1	3	2	0,67	0,67
3	$4^2.1$	4	3	0,75	0,75
4	$3^5.1$	3	6	0,89	2,00
5	$10^2.2^3.1$	10	5	0,50	0,50
6	$12^2.4^2.3.1$	12	6	0,50	0,50
7	$8^6.1$	8	7	0,88	0,88
8	$6^8.3^5.1$	6	14	0,76	2,33
9	$12^6.4^2.1$	12	9	0,75	0,75

$n$	$D$	$x$	$y$	$\lambda \approx$	$\mu \approx$
10	$30^2 \cdot 10^2 \cdot 6^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 1$	30	10	0,33	0,33
11	$5^{24} \cdot 1$	5	25	0,97	5,00
12	$12^{10} \cdot 4^2 \cdot 3^5 \cdot 1$	12	18	0,67	1,50
13	$14^{12} \cdot 1$	14	13	0,93	0,93
14	$24^6 \cdot 8^6 \cdot 3 \cdot 1$	24	14	0,58	0,58
15	$20^8 \cdot 10^2 \cdot 4^{10} \cdot 2^2 \cdot 1$	20	23	0,49	1,15
16	$12^{16} \cdot 6^8 \cdot 3^5 \cdot 1$	12	30	0,71	2,50
17	$18^{16} \cdot 1$	18	17	0,94	0,94
18	$12^{26} \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 1$	12	30	90,90	2,50
19	$9^{40} \cdot 1$	9	41	0,98	4,80
20	$30^{10} \cdot 10^2 \cdot 6^{10} \cdot 3^5 \cdot 2^2 \cdot 1$	30	30	0,44	1,00
41	$20^{84} \cdot 1$	20	85	0,99	4,25
97	$98^{96} \cdot 1$	98	97	0,99	0,99

*Замечание.* Эта теорема подсказывает ряд гипотез, например, для простых значений  $n = p > 5$  диаграммы имеют стандартный простой вид с символом  $D = x^z \cdot 1$ ,  $z = y - 1$ . Видна также связь мультипликативного характера,  $D(pq)$  связано с  $D(p)$  и  $D(q)$ .

Точные формулировки ряда таких гипотез я оставляю слушателям (надеясь, что они даже докажут со временем некоторые из них).

Некоторые специальные диаграммы для некоторых специальных автоморфизмов были вычислены раньше Персивалем, Вивальди, Дайсоном и другими. Но их специальные примеры составляют малую долю всех случаев, и я не решался бы делать из них какие-либо выводы о типичных диаграммах длин циклов (даже для случая автоморфизма Фибоначчи при типичных значениях  $n$ ).

Вместе с конечным тором  $M = \mathbb{Z}_p^2$  можно рассмотреть конечную проективную прямую

$$P = P^1(\mathbb{Z}_p) = (\mathbb{Z}_p^2 \setminus \{0\}) / (\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}),$$

она состоит из  $p + 1$  точек.

Линейный оператор  $A: M \rightarrow M$  действует на  $P$  как специфическая (проективная) перестановка этих точек:

$$A_p \in \text{GP}(\mathbb{Z}_p) \subset S(p + 1).$$

Разбиение этой проективной прямой на циклы проективной перестановки  $A_p$  определяет диаграмму Юнга (площади  $p + 1$ ).

**Теорема 5.** *Диаграммы Юнга циклов проективных перестановок  $A_p$ , порождённых автоморфизмами Фибоначчи*

$$A(z_1, z_2) = (2z_1 + z_2, z_1 + z_2) \pmod{p},$$

имеют при  $p < 20$  следующие значения параметров:

$p$	$D$	$x$	$y$	$\lambda \approx$	$\mu \approx$
2	3	3	1	1,00	0,33
3	$2^2$	2	2	1,00	1,00
5	5.1	5	2	0,60	0,40
7	$4^2$	4	2	1,00	0,50
11	$5^2.1^2$	5	4	0,60	0,80
13	$7^2$	7	2	1,00	0,29
17	$9^2$	9	2	1,00	0,22
19	$9^2.1^2$	9	4	0,53	0,44
41	$10^4.1^3$	10	6	0,70	0,60
97	$49^2$	49	2	1,00	0,04

Теорема 5 доказывается прямыми вычислениями вместе с теоремой 4, но её можно и получить из теоремы 4, факторизуя действие перестановки  $A$  по подгруппе скаляров.

Впрочем, и обратно, можно начать с более простых вычислений теоремы 5, а потом надстраивать проективные перестановки линейными операторами.

Персиваль и Вивальди шли именно этим путём, но скрыли всю простую проективную геометрию ситуации за сложной алгеброй теории расширения полей.

Сравнивая теоремы 4 и 5 с характеристиками случайных перестановок из § 2 и 3, мы замечаем, что диаграммы Юнга автоморфизмов конечных торов сильно отличаются и от диаграмм типичных случайных перестановок того же числа элементов, и от диаграмм Юнга перестановок, определённых таблицами полей Галуа.

А именно, параметр полноты  $\lambda$  в случае автоморфизмов принимает значительно большие значения, причём наблюдающееся для случайных перестановок уменьшение полноты по мере роста площади диаграммы в случае автоморфизма Фибоначчи, видимо, отсутствует.

Асимметрия  $\mu$  диаграмм автоморфизмов тоже заметно выше, чем для случайных перестановок и для перестановок, порождённых таблицами полей Галуа. При этом диаграммы для автоморфизмов чаще

бывают высокими ( $\mu > 1$  в теореме 4), в то время как диаграммы случайных перестановок большого числа элементов обычно низкие ( $\mu < 1$ ), а при увеличении площади диаграммы среднее отношение  $\mu = y/x$  высоты диаграммы к длине стремится, кажется, к нулю.

Значительная асимметрия диаграмм Юнга автоморфизмов делает их статистику сильно отличающейся не только от равномерно-усреднённой по всем  $n!$  перестановкам статистики, которую мы вычисляем в § 1, но и от статистики Вершика — Планшереля, в которой среднее значение отношения  $y/x$  равно 1.

На основании всего этого мы приходим к выводу, что распределение периодических точек автоморфизмов конечного тора по периодам приводит к новым асимптотикам диаграмм Юнга (по сравнению с двумя изученными — равномерной и планшерелевской) уже для автоморфизма Фибоначчи с матрицей  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Можно думать, что сходные явления (может быть, даже с такой же универсальной асимптотикой при  $n \rightarrow \infty$ , а может быть, и с зависимостью этой асимптотики от соответствующей матрице цепной дроби) имеют место и для других автоморфизмов торов.

Было бы интересно изучить поведение при  $n \rightarrow \infty$  средних значений параметров  $x, y, \lambda, \mu$  диаграмм Юнга циклов автоморфизмов  $A$   $n^2$ -точечного тора  $M$  вдоль всей группы автоморфизмов (или хотя бы поведение их чезаровских средних при  $n \rightarrow \infty$ ).

Было бы также интересно сравнить средние по всей симметрической группе  $S(n)$  со средними по подгруппе проективных перестановок  $n = p + 1$  точек конечной проективной прямой  $P^1(\mathbb{Z}_p)$ .

В случае автоморфизмов конечного  $m$ -мерного тора придётся рассматривать «проективные перестановки» множества из

$$n = p^{m-1} + \dots + p + 1$$

точек конечного  $(m - 1)$ -мерного проективного пространства  $P^{m-1}(\mathbb{Z}_p)$ . В этом случае следует, возможно, различать в этом конечном проективном пространстве его «лобачевскую» часть  $\Lambda$  (модели Клейна) и дополнительный конечный релятивистский мир де Ситтера,  $P^{m-1} \setminus \Lambda$ .

Наконец, поведение всех этих объектов при стремлении к бесконечности размерности  $m$  может привести к новым интересным асимптотикам «больших диаграмм Юнга». Дело в том, что для автоморфизмов  $m$ -мерного тора  $A: \mathbb{Z}_n^m \rightarrow \mathbb{Z}_n^m$  эти асимптотические характеристики могут зависеть от многомерной цепной дроби оператора  $A \in GL(m, \mathbb{Z})$ . Например, ответы могут зависеть от «триангуляции» выпуклыми целочисленными многогранниками непрерывного тора

$(S^1)^{m-1}$ , определяющей геометрию «периодов» многомерной цепной дроби оператора  $A$ .

В качестве «диаграмм Юнга циклов» в этом случае нужно использовать, вероятно, не только длины циклов оператора  $A$ , но и описание действия всей коммутативной группы  $\mathbb{Z}^{m-1}$  симметрий периодической многомерной цепной дроби.

Даже средние значения параметров диаграмм Юнга циклов операторов  $A$ , усреднённые по всей группе автоморфизмов (и уже не зависящие от цепной дроби), заслуживают внимательного изучения (хотя бы эмпирического, с помощью экспериментов, подобных описанным выше).

*Замечание.* Перестановка  $n^m$  точек конечного тора  $\mathbb{Z}_n^m$ , заданная матрицей  $A \in \text{SL}(m, \mathbb{Z})$ , имеет определённый период  $T(A, n)$ , для которого

$$A^{T(A,n)} = 1 \pmod{n}.$$

Все длины циклов этой перестановки  $n^m$  элементов делят, очевидно, целое число  $T(A, n)$ .

Поэтому можно было бы сравнивать статистику диаграмм Юнга циклов операторов  $A$  (даже оператора Фибоначчи  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ) при  $n \rightarrow \infty$  не со статистикой всех диаграмм Юнга всех перестановок  $n^m$  элементов, а со статистикой лишь тех из них, все длины циклов которых делят данное целое число  $T(A, n)$ .

Неясно, насколько эта статистика отличается от общей статистики всех  $n^m!$  перестановок множества из  $n^m = |\mathbb{Z}_n^m|$  элементов. Неясен и (несомненно, более лёгкий) вопрос о поведении периода  $T(A, n)$  при  $n \rightarrow \infty$  — ни для матрицы Фибоначчи  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , ни для случайной матрицы  $A$  из  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}_n)$ , ни для случайной матрицы из  $\text{SL}(m, \mathbb{Z}_n)$ , ни для их (рассматривавшихся выше, на с. 141) проективных версий.

Все эти случаи интересны и доступны слушателям (по меньшей мере экспериментально). Теорема 4 доставляет для  $n = (2, 3, \dots, 20)$  следующие периоды  $T(A, n)$  для матрицы Фибоначчи  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ :

$$T(A, n) = (3, 4, 3, 10, 12, 8, 6, 12, 60, 5, 12, 14, 24, 20, 12, 18, 12, 9, 60).$$

Я вычислил при  $n = 5$  средние значения характеристик перестановок по всем перестановкам  $n^2 = 25$  элементов, длины всех циклов которых делят число  $T\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 10$ , имеющим, как и перестановка Фибоначчи, ровно один цикл длины 1.

Число таких перестановок — примерно  $25!! \cdot 2^2 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 11/5$ , где  $(25)!! = 25 \cdot 23 \cdot 21 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$ .

Средние значения параметров этих перестановок получились такие:

$$x_T \approx 10,00, \quad y_T \approx 6,96, \quad \lambda_T \approx 0,56, \quad \mu_T \approx 0,70.$$

Наблюдавшиеся для перестановок Фибоначчи при  $n = 5$  значения

$$x = 10, \quad y = 5, \quad \lambda = 0,50, \quad \mu = 0,50$$

ближе к приведённым выше средним по перестановкам, длины циклов которых делят число  $T$ , чем к средним по всем  $25!$  перестановкам  $25$  элементов, приведённым на с. 137 и равным

$$\hat{x} \approx 9, \quad \hat{y} \approx 5, \quad \hat{\lambda} \approx 0,56, \quad \hat{\mu} \approx 0,56.$$

Но всё же наблюдавшиеся значения сильно отличаются и от указанной выше статистики по перестановкам, длины циклов которых делят число  $T$ .

Поведение этих статистик при  $n \rightarrow \infty$  остаётся неизвестным. Я не знаю даже, как ведёт себя при больших  $n$  странная функция

$$T\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, n\right)$$

от числа  $n$ , определяющего переставлявшийся выше конечный тор из  $n^2$  элементов. Приведённые выше первые два десятка значений этой функции не позволили мне предсказать какую-либо гипотезу о её поведении, но слушатели могли бы здесь быстро продвинуться, хотя бы вычислив следующие значения периода  $T$ , при больших  $n$ .

Читатели лекций 2005 года уже продолжили мои вычисления (при помощи своих компьютеров). Их выкладки подтверждают справедливость моих гипотез о характеристиках случайных подстановок (с. 132), а для автоморфизмов Фибоначчи конечных торов демонстрируют рост длин и высот диаграмм порядка квадратного корня из числа точек конечного тора при средней полноте примерно 0,8 и при средней асимметрии порядка того же квадратного корня.

Для перестановок Фибоначчи конечной проективной прямой их диаграммы Юнга оказались почти прямоугольниками (вида  $k^a$  или  $k^a \cdot 1^2$  с чётным  $a$ , которое равно 2 в 60 % случаев, согласно М. Казаряну и В. Клепцыну).

Я надеюсь, что читатели докажут и эти новые гипотезы.

См. также статью: *Arnold V. Statistics of Young diagrams of cycles of dynamical systems for finite tori automorphisms // Moscow Mathematical Journal. 2006. V. 6, № 1. P. 43–56.*





## Лекция 4

# Геометрия чисел Фробениуса для аддитивных полугрупп

Математика подобна любви: в обоих случаях наибольшее удовольствие доставляет познание.

«Темнота Ньютона» («Newton's Darkness», C. Djerassi, Imperial College Press, 2003).

А ошибусь — мне это трын-трава:  
Я всё равно с ошибкой не расстанусь.

*Б. Л. Пастернак — А. А. Ахматовой*

Предмет этой лекции относится к самым простым вопросам арифметики: какие числа можно получить из данных слагаемых, складывая их (в любом количестве)?

Пусть, скажем, имеются монеты достоинством 3 копейки (алтын) и 5 копеек (пятак).

**Какие суммы можно составить из алтынов и пятаков?**

Очевидно 1, 2 и 4 копейки составить из этих монет нельзя, 3, 5, 6 копеек можно, 7 нельзя. Далее следуют

$$8 = 3 + 5, \quad 9 = 3 + 3 + 3, \quad 10 = 5 + 5.$$

А из этого видно, что можно получить любое большее целое число (достаточно добавлять трёхкопеечные монеты к 8, 9, 10).

Интересно нарисовать множество всех допустимых сумм: оно образует аддитивную полугруппу, т. е. с любыми двумя своими элементами  $x$  и  $y$  содержит и их сумму  $x + y$ . Ноль мы тоже включили в число сумм.

Полугруппа с образующими 3 и 5 изображена на рис. 1 (квадратиками).

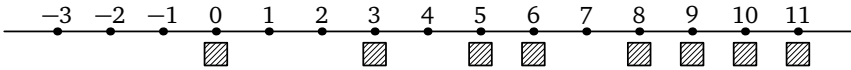


Рис. 1. Полугруппа, порождённая алтыном и пятаком

Интересно отметить, что дополнительное множество целых чисел расположено симметрично этой полугруппе (см. квадратики на рис. 2).

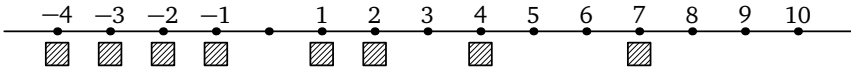


Рис. 2. Дополнение к полугруппе, порождённой алтыном и пятаком

А именно, если  $x$  входит в полугруппу, то  $7 - x$  входит в дополнение. Например, в полугруппу входят все целые числа, большие или равные 8, а в дополнение — все целые числа, меньшие дополнительного к 8 числа  $-1$  (или равные ему).

### § 1. Теорема Сильвестра и числа Фробениуса

Первый крупный американский математик Дж. Сильвестр доказал, что положение будет аналогичным для полугруппы, порождённой любыми натуральными числами  $a$  и  $b$ , у которых наибольший общий делитель равен 1. Эта полугруппа состоит из всевозможных комбинаций  $xa + yb$  (с целыми неотрицательными коэффициентами  $x$  и  $y$ ).

**Теорема 1** (Сильвестр). *Порождённая взаимно простыми числами  $a$  и  $b$  полугруппа содержит все целые числа начиная с*

$$N(a, b) = (a - 1)(b - 1).$$

Мы докажем теорему 1 ниже, в § 6.

Симметрия (с центром  $(N - 1)/2$ ) тоже всегда имеет место:  $x$  принадлежит полугруппе, если и только если  $y = N - 1 - x$  не принадлежит ей.

Задача Фробениуса состоит в том, чтобы понять, как обстоит дело в случае более чем двух образующих. Пусть, например, выбраны  $n$  образующих (натуральных чисел)  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Если наибольший делитель всех этих чисел равен 1, то аддитивная полугруппа их целочисленных комбинаций

$$\{a = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n\}, \quad x_s \geq 0,$$

содержит все целые числа, больше или равные некоторого числа Фробениуса  $N(a_1, \dots, a_n)$ .

Это легко вывести из теоремы Сильвестра, добавляя образующие.

Задача Фробениуса состоит в том, чтобы вычислить число Фробениуса  $N(a_1, \dots, a_n)$  или хотя бы исследовать его поведение при изменении образующих  $a_s$  (например, при  $a_s \rightarrow \infty$ ).

Формула Сильвестра указывает при  $n = 2$  на рост порядка произведения образующих,  $N(a, b) \sim ab$ .

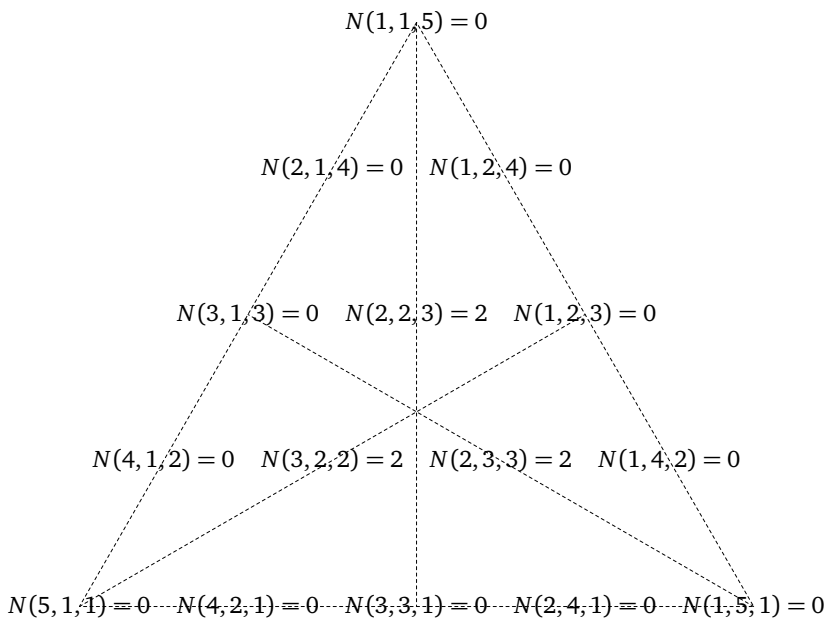
При  $n$  образующих, как мы увидим ниже, роль произведения  $ab$  начнёт играть величина

$$N_0(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[n-1]{(n-1)! a_1 \dots a_n}.$$

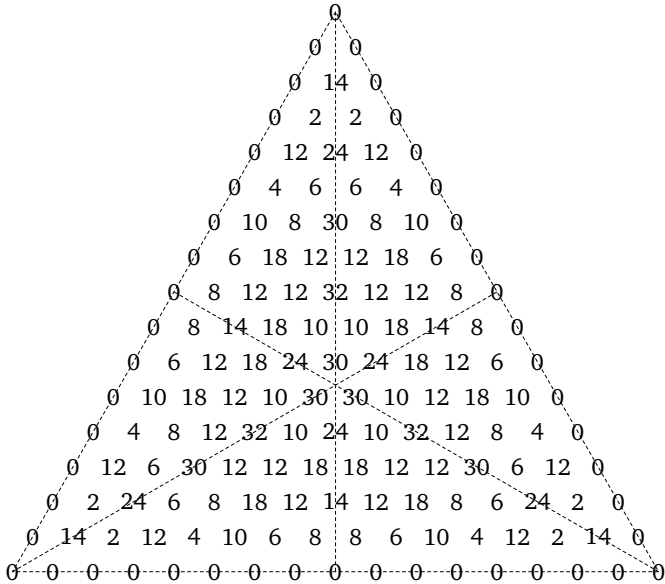
Например, для  $n = 3$  формула такая:

$$N_0(a, b, c) = \sqrt{2abc}.$$

**Пример 1.** Значения  $N(a, b, c)$  для  $a + b + c = 7$  образуют следующий равносторонний треугольник (в котором я отметил его 3 оси симметрии).



**Пример 2.** Для  $a + b + c = 19$  числа Фробениуса  $N(a, b, c)$  образуют следующий равносторонний треугольник.



Как мы увидим ниже (следуя работе Арнольд В. И. Слабые асимптотики чисел решений диофантовых задач // Функциональный анализ и его приложения. 1999. Т. 33, вып. 4. С. 65–66), при росте суммы  $\sigma = a_1 + \dots + a_n$  эти заполнения (правильных  $n$ -мерных симплексов) числами Фробениуса  $N(a_1, \dots, a_n)$  порождают своеобразные асимптотические закономерности. Некоторые из них мы далее докажем, другие же останутся естественно-научными закономерностями, ожидающими строгой математической теории (возможно, от слушателей этих лекций).

## § 2. Загораживающие деревья леса

Предположим, что велосипедист едет по прямому шоссе (рис. 3) и подъезжает к углу леса. Глядя на этот угол, он сначала видит крайнее дерево, но потом деревьев становится всё больше, и начиная с некоторого места  $N$  лес становится сплошным.

Если лес посажен квадратно-гнездовым способом, то те места шоссе, где велосипедист, смотря точно перпендикулярно ему, увидит дерево, образуют аддитивную полугруппу (вдоль шоссе, где начало координат выбрано в ближайшей к углу леса точке).

Точно так же и общую задачу об аддитивных полугруппах можно рассматривать как задачу о линейной проекции

$$\pi: \mathbb{Z}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$$

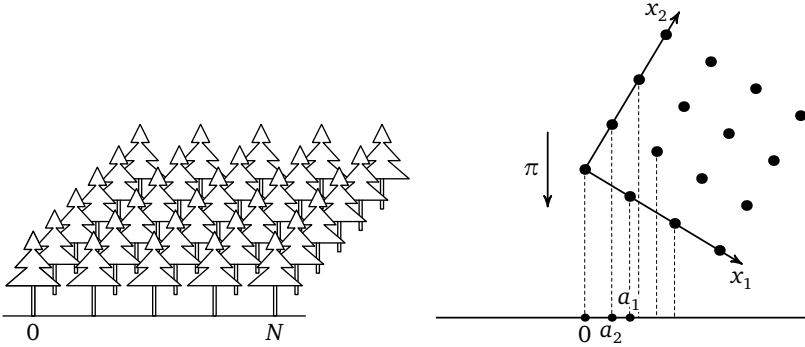


Рис. 3. Проекция  $\pi$  квадратно-гнездового леса на шоссе

$n$ -мерного квадранта  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $x_s \geq 0$ ,  $x_s \in \mathbb{Z}$ . Проекция  $\pi$  сопоставляет «дереву»  $x \in \mathbb{Z}_+^n$  элемент полугруппы

$$a = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n.$$

Не заботясь вначале о математической строгости, постараемся оценить то место  $N$ , начиная с которого лес кажется сплошным.

В нашей модели мы будем предлагать образующие полугруппы  $(a_1, \dots, a_n)$  натуральными числами, так что вся полугруппа  $\pi(\mathbb{Z}_+^n)$  состоит из целых чисел.

Постараемся понять, сколько из них меньше фиксированного числа  $l$  или равно ему (рис. 4). Обозначим это число через  $M(l)$ .

Будем считать, что площадь ( $n$ -мерный объём при  $n > 2$ ) одного квадрата ( $n$ -мерного куба) квадратно-гнездового леса равна 1. Тогда число  $M(l)$  будет примерно равно площади ( $n$ -мерному объёму) треугольника (симплекса размерности  $n$ )  $S(l)$  в  $\mathbb{R}^n$ , заданного неравенствами

$$S(l) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_s \geq 0, \sum_{s=1}^n x_s \leq l \right\}.$$

Катеты этого прямоугольного треугольника (симплекса) имеют длины  $l/a_s$ .

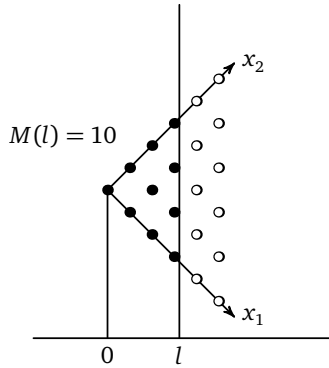


Рис. 4. Симплекс первых деревьев

Поэтому эта площадь есть

$$V(l) = \frac{1}{2} \frac{l}{a_1} \frac{l}{a_2}.$$

В  $n$ -мерном случае  $n$ -мерный объём симплекса  $S(l)$  есть

$$V(l) = \frac{1}{n!} \prod_{s=1}^n \frac{l}{a_s}.$$

Итак, мы приходим к гипотетической приближённой формуле для числа деревьев в симплексе  $S(l)$ :

$$M(l) \approx \frac{l^n}{n! \Pi}, \quad \text{где } \Pi = \prod_{s=1}^n a_s.$$

Чтобы проекция  $\pi$  покрывала точку  $l$ , нужно, чтобы выполнялось неравенство  $M(l) - M(l-1) \geq 1$ .

Считая  $l$  большим и заменяя разности производными, мы получаем условие  $dM/dl \geq 1$ , т. е.

$$\frac{l^{n-1}}{(n-1)! \Pi} \geq 1,$$

или

$$l \geq N_0 = {}^{n-1}\sqrt{(n-1)! \Pi}. \tag{1}$$

При  $n = 2$  получается приближённое условие  $l \geq a_1 a_2$  (близкое асимптотически к точному условию Сильвестра  $l \geq (a_1 - 1)(a_2 - 1)$ ).

Вопрос о строгом математическом обосновании формулы (1) очень непрост, и мы обсудим его ниже, в § 3 и 4.

### § 3. Геометрия чисел

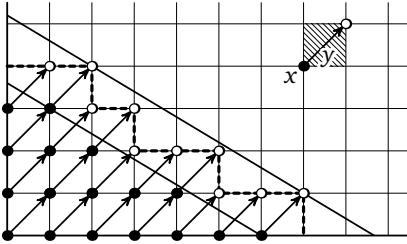
Попытку обоснования формулы (1) мы начнём с очень простых соображений (Минковского), связывающих число целых точек  $M(l)$  с объёмом  $V(l)$ : в каком именно смысле  $M(l) \approx V(l)$ ? Обозначаем через  $\sigma$  сумму  $a_1 + \dots + a_n$ .

**Теорема 2.** *Имеют место неравенства  $V(l) \leq M(l) \leq V(l + \sigma)$ .*

**Доказательство.** Каждой целой точке  $x$  замкнутой области  $S(l)$  сопоставим единичный  $n$ -мерный куб (рис. 5)

$$\{y \in \mathbb{R}^n : x_s \leq y_s \leq x_s + 1, s = 1, \dots, n\}.$$

Объединение таких кубов, построенных для всех целых точек  $x$  замкнутого симплекса  $S(l)$ , образует многогранник  $P$ . Этот многогранник содержится в замкнутом симплексе  $S(l + \sigma)$ .



$$a_1 = 3, a_2 = 5, l = 18, M(l) = 17,$$

$$V(l) = 10,8 \quad V(l + 1) = 12\frac{1}{30},$$

$$V(l + \sigma) = 22\frac{8}{15},$$

$$V\left(l + \frac{\sigma}{2}\right) = 16\frac{2}{15} < M(l),$$

$$V\left(l + \frac{\sigma + 2}{2}\right) = 17\frac{19}{30} > M(l)$$

Рис. 5. Описанный многогранник  $P$  симплекса  $S$

Действительно, для точки  $y$  куба, построенного по точке  $x$ , мы находим

$$(a, y) \leq (a, x) + (a, 1) = l + \sigma.$$

Многогранник  $P$  содержит замкнутый симплекс  $S(l)$ .

Действительно, заменим каждую координату  $x_s$  точки  $x$  из  $S(l)$  её целой частью  $z_s$ . Полученная точка  $z$  также лежит в замкнутом симплексе  $S(l)$ , поэтому исходная точка  $x$  принадлежит кубу, построенному по целой точке  $z$ , а значит,  $x$  принадлежит многограннику  $P$ .

Из доказанных включений многогранников

$$S(l) \subseteq P \subseteq S(l + \sigma)$$

вытекает неравенство теоремы 2 между объёмами этих многогранников. □

*Замечание.* Примеры показывают, что имеют место гораздо более интересные неравенства для числа  $M(l)$  целых точек в замкнутом симплексе  $S(l)$ :

$$V\left(l + \frac{\sigma - 2}{2}\right) \leq M(l) \leq V\left(l + \frac{\sigma + 2}{2}\right).$$

Среднее арифметическое левой и правой оценивающих величин даёт особенно хорошее приближение к числу целых точек  $M(l)$ .

**Пример.** Для тройки  $\{a_s\} = \{3, 5, 8\}$  легко вычислить значения. В этом случае  $\sigma/2 = 8$ .

$l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M(l)$	1	1	1	2	2	3	4	4	6	7	8
$V(l)$	0	$\frac{1}{720}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{343}{720}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{81}{80}$	$\frac{25}{18}$
$l$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$M(l)$	10	11	13	15	17	20	22	25	28	31	35
$V(l)$	1,84	2,4	3,05	3,81	4,69	5,69	7,60	8,10	9,52	11,11	12,86

Случаи чётной и нечётной сумм  $\sigma$  немного различаются, поэтому приведу ещё таблицу для тройки  $\{a_s\} = \{3, 5, 7\}$ ,  $\sigma = 15$ ,  $(\sigma + 1)/2 = 8$ .

$l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M(l)$	1	1	1	2	2	3	4	5	6	7	9
$V(l)$	0	$\frac{1}{630}$	$\frac{8}{630}$	$\frac{3}{70}$	0,102	0,198	0,343	0,544	0,812	1,157	1,59

$l$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$M(l)$	10	12	14	16	19	21	24	27	30	34
$V(l)$	2,11	2,74	3,49	4,35	5,36	6,50	7,79	9,25	10,88	12,69

Здесь неравенства

$$V\left(l + \frac{\sigma - 1}{2}\right) = V(l + 7) \leq M(l) \leq V(l + 8) = V\left(l + \frac{\sigma + 1}{2}\right)$$

выполняются при  $l \geq 3$ , но при  $l = 2$  положение иное:

$$\left(V\left(7\frac{1}{2}\right) \approx 0,984\right) < (M(2) = 1) < V(8).$$

Я не знаю общего доказательства отмеченных здесь неравенств даже для случая  $n = 2$  плоских многоугольников (где вселяют надежду соображения симметрии по отношению к точке прямой  $(a, x) = l + \sigma/2$ ).

Теперь мы используем доказанную выше теорему 2 для оценки числа Фробениуса снизу.

Рассмотрим интервал  $N \leq l < N + r$ , где  $N$  — число Фробениуса. Для каждой точки  $l$  этого интервала существует целая точка  $x$  ( $x_s \geq 0$ ), в которой  $(a, x) = l$ . Поэтому в симплексе  $S(N + r - 1)$  лежит не меньше чем  $r$  целых точек:  $M(N + r - 1) \geq r$ .

Подставляя оценку числа целых точек  $M$  сверху из теоремы 2, мы получаем оценку снизу для объёма соответствующего симплекса, а значит, оцениваем снизу и число Фробениуса  $N$ .

Из теоремы 2 мы заключаем, что

$$r \leq M(N + r - 1) \leq V(N + \sigma + r - 1) = \frac{(N + \sigma + r - 1)^n}{n! \Pi}.$$

Для значения  $r = \lambda(N + \sigma - 1)$  мы находим

$$\lambda(N + \sigma - 1) \leq \frac{(N + \sigma - 1)^n (1 + \lambda)^n}{n! \Pi},$$

откуда

$$N + \sigma - 1 \geq \left(\frac{\lambda n! \Pi}{(1 + \lambda)^n}\right)^{1/(n-1)}.$$

Итак,

$$N \geq \omega \Pi^{1/(n-1)} - \sigma + 1,$$



где коэффициент  $\omega$  имеет следующий вид:

$$\omega(\lambda) = \left( \frac{\lambda n!}{(1+\lambda)^n} \right)^{1/(n-1)}.$$

При  $\lambda = \frac{1}{n-1}$  имеем

$$\left( \frac{\lambda}{(1+\lambda)^n} \right)^{1/(n-1)} = \frac{n-1}{n^{1+1/(n-1)}} \geq \frac{1}{4},$$

так что наша оценка числа Фробениуса имеет вид

$$N \geq \frac{1}{4}(n! \Pi)^{1/(n-1)} - \sigma + 1.$$

Это неравенство указывает на именно такой рост порядка  $\Pi^{1/(n-1)}$ , т. е.  $\sigma^{n/(n-1)}$ , как дали наши эвристические рассуждения в § 2, хотя коэффициент в теперь доказанной оценке при  $n = 2$  меньше, чем в формуле Сильвестра,  $N_0 = \Pi - \sigma + 1$ .

## § 4. Оценка числа Фробениуса сверху

Наша оценка будет использовать простые общие факты геометрии чисел.

Рассмотрим в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  базис  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$  и породим этими векторами решётку  $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ . Мы оценим теперь сверху наибольший возможный радиус  $R$  шара в этом пространстве, не содержащего ни одной точки решётки.

**Теорема 3.** *Имеет место неравенство*

$$R \leq \frac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + \dots + R_n^2}}{2},$$

где  $R_s$  означает расстояние от точки  $P_s$  до пространства, порождённого векторами  $(P_1, \dots, P_{s-1})$ .

**Доказательство.** При  $n = 1$  это очевидно:  $R \leq |P_1|/2$ . Предположим, что при  $n = k$  это уже доказано.

Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^{k+1}$ , порождённом векторами  $(P_1, \dots, P_{k+1})$ , гиперплоскость  $Q$ , порождённую векторами  $(P_1, \dots, P_k)$ , и параллельные ей гиперплоскости  $Q_j$ , проходящие через точки  $jP_{k+1}$  соответственно (рис. 6).

Центр пустого шара в пространстве  $\mathbb{R}^{k+1}$  попадёт в один из слоёв толщины  $R_{k+1}$  между гиперплоскостями  $Q_j$ , а потому удалён от одной из них не более чем на расстояние  $R_{k+1}/2$ .

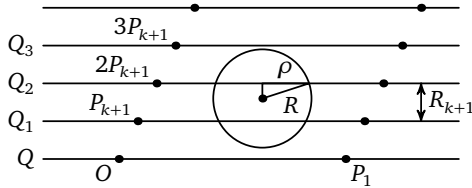


Рис. 6. Пустой шар в пространстве с решёткой размерности  $k + 1$

Пересечение нашего пустого шара с этой гиперплоскостью  $Q_j$  пусто в этой гиперплоскости, а потому его радиус  $\rho$  уже оценён предполагающейся известной при  $n = k$  теоремой 3:

$$\rho \leq \frac{\sqrt{R_1^2 + \dots + R_k^2}}{2}.$$

По теореме Пифагора мы получаем

$$R^2 \leq \rho^2 + \left(\frac{R_{k+1}}{2}\right)^2 = \frac{R_1^2 + \dots + R_k^2 + R_{k+1}^2}{4},$$

чем и доказана теорема 3.  $\square$

Теперь мы применим эту теорему к решётке целых точек в плоскости  $\{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) = l\}$ , в которой нет целых точек в ортанте  $x_s \geq 0$ . Симплекс размерности  $n - 1$ , по которому гиперплоскость пересекает ортант, мы обозначим через  $S(l)$ . Разделим зависимость функций от вектора  $a = (a_1, \dots, a_s)$  на зависимость от его направления  $\alpha(a) = a/\sigma(a)$  и от его «размера»  $\sigma(a)$ .

**Теорема 4.** Радиус шара, вписанного в симплекс  $S(l)$ , равен  $\frac{\beta(\alpha)l}{\sigma(a)}$ , где безразмерный коэффициент  $\beta$ , зависящий лишь от направления вектора  $a$ , есть

$$\beta(\alpha) = \frac{|\alpha|}{\sum_{s=1}^n (\alpha_s \sqrt{|\alpha|^2 - \alpha_s^2})}.$$

**Пример.** При  $n = 2$  эта формула имеет вид

$$\beta(\alpha) = \frac{|\alpha|}{2\Pi} = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{2\alpha_1\alpha_2} \geq \sqrt{2}.$$

При любом  $n$  имеем

$$\beta(\alpha) \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq 1.$$

**Доказательство теоремы 4.** Пирамида с основанием  $S(l)$  имеет объём

$$V(l) = \frac{1}{n!} \prod_{s=1}^n \left( \frac{l}{a_s} \right) = \frac{l^n}{n! \Pi}.$$

В то же время этот объём выражается через объём  $|S(l)|$  основания и длину  $h$  опущенной на него из  $O$  высоты:

$$V(l) = \frac{1}{n} h |S(l)|, \quad h = \frac{l}{|a|}.$$

Поэтому

$$|S(l)| = \frac{nV(l)}{h} = \frac{l^{n-1}|a|}{(n-1)! \Pi} = \frac{l^{n-1}\sigma(a)|a|}{(n-1)! \Pi}. \quad (1)$$

С другой стороны, объём симплекса  $S(l)$  равен  $1/(n-1)$  от произведения радиуса  $r$  вписанного в него шара на сумму площадей  $|S_s|$  его граней  $\{x_s = 0\}$ , поэтому

$$r = \frac{n-1}{\sum_{s=1}^n |S_s|} |S(l)|. \quad (2)$$

Вычисляя площади граней по формуле (1), мы получаем

$$S_s = \frac{l^{n-3}}{(n-2)!} \frac{a_s \sqrt{|\alpha|^2 - a_s^2}}{\Pi} = \frac{\sigma^2(a) l^{n-2} \alpha_s \sqrt{|\alpha|^2 - \alpha_s^2}}{(n-2)! \Pi}. \quad (3)$$

Подставляя в формулу (2) выражения (1) и (3), мы находим

$$\begin{aligned} r &= \frac{(n-1) l^{n-1} \sigma(a) |a|}{(n-1)! \Pi} \frac{(n-2)! \Pi}{\sigma^2(a) l^{n-2} \sum_{s=1}^n (\alpha_s \sqrt{|\alpha|^2 - \alpha_s^2})} = \\ &= \frac{l}{\sigma(a)} \frac{|a|}{\sum_{s=1}^n (\alpha_s \sqrt{|\alpha|^2 - \alpha_s^2})}, \end{aligned}$$

что и доказывает теорему 4.  $\square$

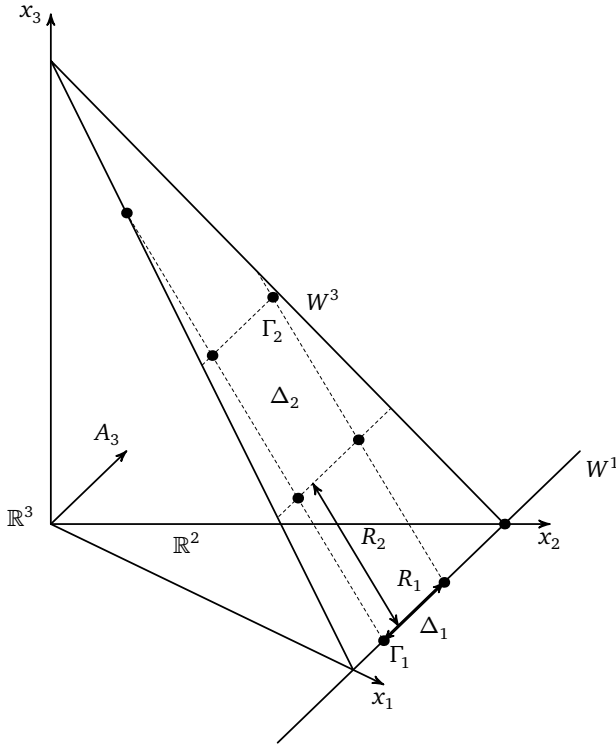
Заметим теперь, что если в симплексе  $S(l)$  нет целых точек, то их нет и во вписанном в него шаре. Поэтому радиус этого вписанного шара не может превосходить границы, доставляемой теоремой 3 (применённой к  $(n-1)$ -мерной гиперплоскости  $\{x \in \mathbb{R}^n: (a, x) = l\}$ ). Эта теорема доставляет неравенство

$$\frac{\beta(a)l}{\sigma(a)} \leq \frac{\sqrt{R_1^2 + \dots + R_{n-1}^2}}{2}, \quad l \leq \frac{\sigma(a)}{2\beta(a)} \sqrt{R_1^2 + \dots + R_{n-1}^2}. \quad (4)$$

**Теорема 5.** Для вектора  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  любого направления  $\alpha = a/\sigma(a)$  имеет место оценка числа Фробениуса сверху

$$N(a) \leq 1 + \gamma(a)\sigma^2(a)$$

(с указанной в доказательстве постоянной  $\gamma$ ).



**Рис. 7.** Последовательные высоты  $R_s$  и параллелепипеды  $\Delta_s$  при  $n = 3$ . Вместо плоскости  $(A_3, x) = 0$  нарисована плоскость  $(A_3, x) = \text{const}$ , где решётка  $\Gamma_2$  такая же

**Доказательство теоремы 5.** Рассмотрим флаг из подпространств  $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n$ , где  $\mathbb{R}^s$  натянута на первые  $s$  координатных осей (рис. 7).

Зададим в  $\mathbb{R}^n$  гиперплоскость  $W^{n-1}$  уравнением

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0.$$

Введём в каждом пространстве  $\mathbb{R}^s$  вектор  $A_s$  компонентами  $a_1, \dots, a_s$  и определим в  $\mathbb{R}^s$  ортогональную этому вектору гиперплоскость  $W^{s-1}$  уравнением

$$(A_s, X_s) = 0 \quad (\text{где } X_s = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s).$$

Мы определили, таким образом, флаг векторных евклидовых подпространств в гиперплоскости  $W^{n-1}$ :

$$0 \subset W^1 \subset \dots \subset W^{n-1}$$

(например,  $W^1$  — это прямая на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , заданная уравнением  $(A_2, X_2) = 0$ , т. е. уравнением  $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ ).

Пересечение гиперплоскости  $W^s$  с целочисленной решёткой  $\mathbb{Z}^{s+1}$  пространства  $\mathbb{R}^{s+1}$  определяет в этой  $s$ -мерной гиперплоскости  $s$ -мерную решётку  $\Gamma_s$ .

**Лемма.** *Объём фундаментального  $s$ -мерного параллелепипеда  $\Delta_s$  решётки  $\Gamma_s$  в евклидовом пространстве  $W^s$  равен  $|\Delta_s| = |A_{s+1}|/d_s$ , где  $d_s$  — наибольший общий делитель чисел  $(a_1, \dots, a_{s+1})$  и  $|A_s|^2 = a_1^2 + \dots + a_s^2$ , так что  $|A_s|$  — евклидова длина вектора  $A_s$ .*

**Доказательство леммы.** Фундаментальный параллелепипед решётки  $\mathbb{Z}^{s+1}$  в пространстве  $\mathbb{R}^{s+1}$  можно получить из параллелепипеда  $\Delta_s$  решётки  $\Gamma_s$  в  $W^s$ , лежащего в гиперплоскости  $W^s$ , добавлением ближайшего к этой гиперплоскости целочисленного вектора  $x \in \mathbb{Z}^{s+1}$  (рис. 8).

Скалярное произведение этого вектора с нормальным к гиперплоскости  $W^s$  вектором  $A_{s+1}$  имеет наименьшее положительное значение, возможное для целочисленных линейных комбинаций

$$a_1x_1 + \dots + a_{s+1}x_{s+1} = (A_{s+1}, x).$$

Значение этой комбинации делится на общее кратное  $d_s$  её коэффициентов, и её наименьшее значение есть  $d_s$ . Итак, для ближайшего к гиперплоскости  $W^s$  не лежащего в ней целочисленного вектора  $x$  выполняется соотношение  $(A_{s+1}, x) = d_s$  (рис. 8).

Найдём теперь расстояние от этого ближайшего вектора до гиперплоскости  $W^s$  (рис. 8).

Для этого проведём нормаль к гиперплоскости:  $\{y = |y|A_{s+1}/|A_{s+1}|\}$ . Точка  $y$  на этой нормали лежит от гиперплоскости  $W^s$  на таком же расстоянии  $\rho = |y|$ , как и ближайшая целая точка  $x$ , если

$$(A_{s+1}, y) = (A_{s+1}, x) = d_s.$$

Умножая  $y$  скалярно на вектор  $A_{s+1}$ , мы находим

$$(A_{s+1}, y) = \frac{|y|(A_{s+1}, A_{s+1})}{|A_{s+1}|} = |y| \cdot |A_{s+1}| = d_s,$$

откуда  $\rho = |y| = d_s/|A_{s+1}|$ .

Итак, объём фундаментального параллелепипеда решётки  $\mathbb{Z}^{s+1}$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{s+1}$  есть  $|\Delta_s| \cdot |y| = \rho|\Delta_s|$ . Но этот объём равен 1, так как  $\mathbb{Z}^{s+1}$  — стандартная целочисленная решётка.

Значит,  $|\Delta_s| = 1/\rho = |A_{s+1}|/d_s$ , и лемма доказана.  $\square$

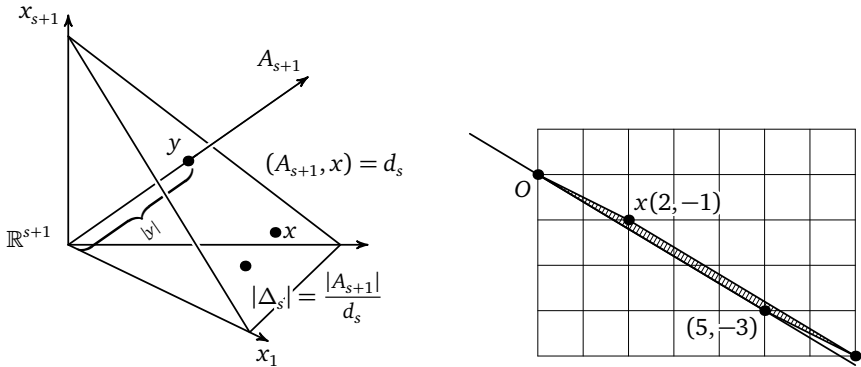


Рис. 8. Вычисление объёма  $|\Delta_s|$  фундаментального параллелепипеда  $\Delta_s$  решётки  $\Gamma_s$  в  $W^s$

**Следствие.** Длина  $R_s$  высоты фундаментального параллелепипеда  $\Delta_s$  решётки  $\Gamma_s$  в евклидовом пространстве  $W^s$ , основанием которого является фундаментальный параллелепипед  $\Delta_{s-1}$  подрешётки  $\Gamma_{s-1}$ , равна

$$R_s = \frac{|\Delta_s|}{|\Delta_{s-1}|}.$$

**Доказательство следствия.**  $s$ -мерный объём  $|\Delta_s|$  параллелепипеда  $\Delta_s$  равен произведению  $(s - 1)$ -мерного объёма  $|\Delta_{s-1}|$  параллелепипеда-основания на длину  $R_s$  высоты (рис. 7).  $\square$

Нам будет удобнее записывать эту формулу для длины  $R_s$  очередной высоты в виде

$$R_s^2 = \frac{(a_1^2 + \dots + a_{s+1}^2)d_{s-1}^2}{(a_1^2 + \dots + a_s^2)d_s^2}. \tag{5}$$

Заметим, что число  $d_{s-1}$  делится на  $d_s$  нацело (так как наибольший общий делитель набора чисел является делителем любого его поднабора).

Таким образом, последовательность целых чисел  $q_s = d_{s-1}/d_s$  имеет произведение

$$q_1 q_2 \dots q_{n-1} = d_0 = a_1,$$

в то время как произведение длин высот имеет вид

$$R_1^2 \dots R_{n-1}^2 = \frac{|\Delta_1|^2 |\Delta_2|^2}{|\Delta_0|^2 |\Delta_1|^2} \dots \frac{|\Delta_{n-1}|^2}{|\Delta_{n-2}|^2} = \frac{|\Delta_{n-1}|^2}{|\Delta_0|^2}.$$

Однако нам известны граничные условия  $|\Delta_0| = |A_1|/d_1 = a_1/a_1 = 1$ ,  $|\Delta_{n-1}|^2 = |A_n|^2/d_n^2 = |A_n|^2/1$ . Из них мы заключаем, что произведение

длин всех  $n - 1$  высот даётся удивительной формулой

$$R_1^2 \dots R_{n-1}^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2. \quad (6)$$

Это равенство и даст нам оценки длин высот сверху. Для этого сначала оценим их снизу.

Из формулы (5) для длин высот следует, что  $R_s^2 > 1$  (поскольку  $|A_{s+1}|^2 > |A_s|^2$  и  $q_s \geq 1$ ).

Поэтому из формулы (6) для произведения длин высот вытекают оценки длин высот сверху:

$$R_s^2 = \frac{|A_n|^2}{R_1^2 \dots R_{s-1}^2 R_{s+1}^2 \dots R_{n-1}^2} < |A_n|^2.$$

Этим доказано неравенство

$$\sum_{s=1}^{n-1} R_s^2 < (n-1)(a_1^2 + \dots + a_n^2).$$

Эта оценка квадратов длин высот сверху порождает, согласно теореме 3, оценку сверху радиуса  $r$  пустого шара в гиперплоскости  $W^{n-1}$  (не имеющего общих точек с решёткой  $\Gamma_{n-1} = \mathbb{Z}^n \cap W^{n-1}$ ):

$$r^2 \leq \frac{n-1}{4} |A_n|^2. \quad (7)$$

По теореме 4 в гиперплоскости  $W^{n-1}$  существует пустой шар радиуса  $\frac{l}{\sigma(a)} \beta(\alpha)$  (с зависящей лишь от направления  $\alpha$  вектора  $a$  постоянной  $\beta$ ), если  $l = N(a) - 1$  (так как в симплексе  $A_n(x) = l$ ,  $x_j \geq 0$ , нет целых точек, их нет и во вписанном в него шаре).

Из неравенства (7) мы находим для  $l$  оценку сверху:

$$\frac{l^2}{\sigma^2(a)} \beta^2(\alpha) \leq \frac{n-1}{4} |A_n|^2,$$

откуда

$$N(a) = l + 1 \leq 1 + \frac{\sqrt{n-1}}{2\beta} |A_n| \sigma(a).$$

Но

$$|A_n|^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2 = \sigma^2(a)(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2),$$

так что мы получаем оценку числа Фробениуса сверху:

$$N(a) \leq 1 + \frac{\sqrt{n-1}}{2\beta(\alpha)} \sigma^2(a) \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2},$$

что и доказывает теорему 5 (с постоянной  $\gamma(\alpha) = \frac{\sqrt{n-1}|\alpha|}{2\beta(\alpha)}$ ).  $\square$

Впрочем, иногда полезнее доставляющая меньшую оценку числа Фробениуса сверху оценка

$$N \leq 1 + \frac{\sigma(a)}{\beta(\alpha)} \sqrt{\left(\sum_{s=1}^{n-1} R_s^2\right)} \cdot \frac{1}{2} \tag{8}$$

с выражениями (5) для  $R_s^2$ . Например, когда все  $d_s$  равны 1, все длины высот  $R_s$  зависят только от направления  $\alpha$  вектора  $a$ , исключая лишь  $R_1^2 = a_1^2 + a_2^2$ .

*Замечание.* Оценка числа Фробениуса  $N$  снизу (§ 3) имела вид  $N \geq \text{const}(\alpha)\Pi^{1/(n-1)} (\geq \text{const}(\alpha)\sigma^{1+1/(n-1)})$ . Эта величина растёт с ростом  $\sigma$  медленнее, чем  $\sigma^2$ , при  $n > 2$ . Например, при  $n = 3$  оценка снизу имеет вид  $N \geq \text{const} \cdot \sigma^{3/2}$ , а оценка сверху:  $N \leq \text{const} \cdot \sigma^2$ , что гораздо больше.

Следующий пример показывает неизбежность этого явления: мы приведём примеры, где действительно  $N(a, b, c) \geq \text{const} \cdot \sigma^2$  (что при больших  $\sigma$  во сколько угодно раз больше, чем  $\sigma^{3/2}$ ), так что оценка сверху величиной роста  $\sigma^{3/2}$  при  $n = 3$  невозможна.

**Пример.** Рассмотрим три (взаимно простых) числа

$$a, b, c = a + b.$$

В этом случае число Фробениуса легко вычислить:

$$N(a, b, c) = N(a, b)$$

(поскольку суммы копий чисел  $(a, b, c)$  являются суммами копий чисел  $a$  и  $b$ ).

Итак,  $N(a, b, c) = (a - 1)(b - 1)$  (по формуле Сильвестра). Нам нужен будет лишь квадратичный рост по  $\sigma$ , доказанный выше и без формулы Сильвестра (впрочем, доказанной ниже, в § 6).

Предположим теперь, что  $1/9 < a/b < 9$ ,  $a > 2$ ,  $b > 2$  (рис. 9). Тогда  $a - 1 > a/2$ ,  $b - 1 > b/2$ , поэтому выполняется неравенство

$$N(a, b, c) = (a - 1)(b - 1) > \frac{ab}{4}.$$

Но  $ab > (9/100)(a + b)^2$  в секторе  $1/9 < a/b < 9$ . Действительно, функция  $a + b$  достигает на отрезке гиперболы  $ab = 1$  в нашем секторе максимума в концевых точках отрезка, где  $a = 3$ ,  $b = 1/3$  или  $a = 1/3$ ,  $b = 3$ , так что всюду в этом секторе

$$a + b \leq 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}.$$



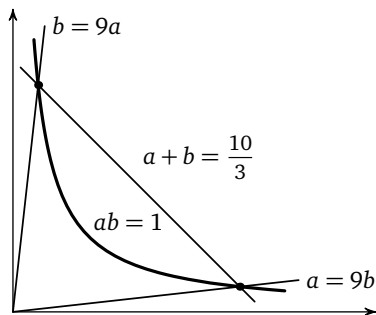


Рис. 9. Сектор, в котором  $(a + b)^2 < \left(\frac{10}{3}\right)^2 ab$

Значит, по однородности и при любом значении  $ab$  в этом секторе выполняется неравенство

$$(a + b)^2 < \left(\frac{10}{3}\right)^2 ab.$$

Итак, всюду в указанном секторе выполнено неравенство

$$\frac{ab}{4} > \frac{9(a+b)^2}{400}, \quad \text{т. е.} \quad N(a, b, c) > \frac{9}{400} \sigma^2.$$

В частности, отношение

$$\frac{N(a, b, c)}{\sigma^{3/2}} > \frac{9}{400} \sqrt{\sigma}$$

принимает в точках указанной области (со взаимно простыми  $a$  и  $b$ ) сколь угодно большие значения, делая оценку сверху вида

$$N(a, b, c) < \text{const} (a) \sigma^{3/2}$$

невозможной (для многих троек в целом секторе направлений  $a$ ).

Таким образом, примеры квадратичного по  $\sigma(a)$  роста чисел Фробениуса имеются. Тем не менее, я не сумел выяснить, насколько многочисленны тройки, обладающие описанным выше свойством квадратичного роста числа Фробениуса  $N$  с ростом  $\sigma$ : типичны они или исключительны?

Дело в том, что рассуждения из приведённого выше доказательства неравенства  $N \leq \text{const} \cdot \sigma^2$  доказывают в действительности больше (см. выше неравенство (8)). Величина  $\sigma^2$  вместо  $\sigma^{1+1/(n-1)}$  получилась из-за того, что мы оценили рост всех длин высот  $R_s$  величиной  $|A_n|^2$ , в то время как мы знаем, что с этой скоростью растёт только их произведение  $R_1^2 \dots R_{n-1}^2 = |A_n|^2$ , так что сами длины высот растут медленнее.

В случае, когда все *отношения* длин высот  $R_s/R_t$  ограничены сверху некоторой (не зависящей от  $|A_n|$ ) постоянной, из приведённого выражения (6) для произведения получались бы оценки длин высот гораздо меньшей величиной, чем использованное у нас  $|A_n|^2$ , а именно  $R_s^2 \leq \text{const} \cdot |A_n|^{2/(n-1)}$ .

Рассмотрим, например, случай, когда коэффициенты  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  можно расположить в таком порядке, чтобы все наибольшие общие делители первых из них

$$d_1 = (a_1, a_2), \quad d_2 = (a_1, a_2, a_3), \quad \dots, \quad d_{n-2} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

были равны 1, так что формула (5) принимает не зависящий от  $\sigma(a)$  вид:

$$R_s^2 = \frac{a_1^2 + \dots + a_{s+1}^2}{a_1^2 + \dots + a_s^2} = \frac{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_{s+1}^2}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_s^2} = \Psi_s(\alpha).$$

В этом случае условие ограниченности отношений длин высот  $R_s/R_t$  выделяет сектор в пространстве направлений, в пределах которого действует оценка  $N \leq 1 + \text{const} \cdot \sigma^{1+1/(n-1)}$ , так что асимптотика числа Фробениуса  $N$  порядка  $\sigma^{n/(n-1)}$  (т. е.  $\Pi^{1/(n-1)}$ ) имеет место для одних направлений, а порядка  $\sigma^2$  (т. е.  $\Pi^{2/n}$ ) — для других, и вопрос о том, каких направлений больше, непрост.

Даже вопрос о поведении в зависимости от  $\sigma$  средних значений  $N(\sigma)$  чисел  $N(a)$  по всем направлениям векторов  $a$  с данной суммой координат  $\sigma(a)$  непрост и заслуживает экспериментального исследования.

Я сделал в этом направлении только первые шаги, но при привлечении надлежащей компьютерной техники можно быстро продвинуться вперёд в этих эмпирических исследованиях.

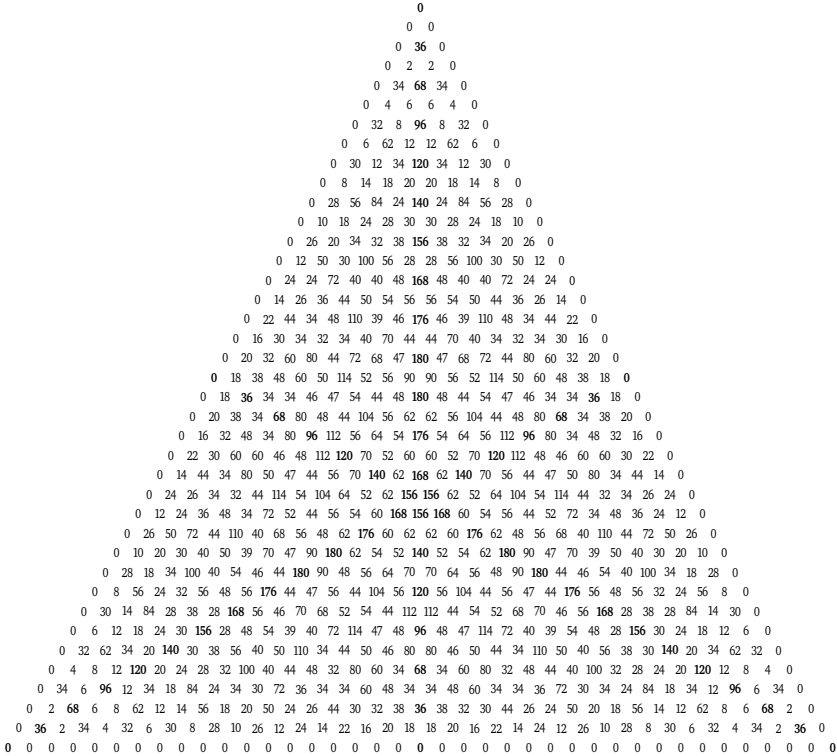
Приведённые ниже численные данные подсказывают достижение средними числами Фробениуса  $\hat{N}$  роста со скоростью меньше  $\sigma^2$ , но он может замедлиться при бóльших значениях суммы  $\sigma = a + b + c$  (я дошёл только до  $\sigma = 41$ , но см. описание последующих результатов на с. 166).

## § 5. Средние значения чисел Фробениуса

Для сравнения доказанных оценок с реальностью я сосчитал явно все значения чисел Фробениуса  $N(a, b, c)$  для  $\sigma = 41$ , т. е. для всех 780 троек натуральных чисел с суммой  $a + b + c = 41$ .

В качестве суммы  $\sigma$  я выбрал простое число, для того чтобы исключить случай «соизмеримости», когда все числа  $a_s$  имеют нетривиальный общий делитель, так что порождённая ими аддитивная полугруппа не содержит всех целых чисел начиная с  $N$  ни при каком  $N$ .

Тройки чисел  $N(a, b, c)$  с данной суммой  $\sigma$  естественно образуют равносторонний треугольник. Для  $\sigma = 7$  и 19 такие треугольники приведены выше, на с. 149. При  $\sigma = 41$  достаточно рисовать только часть всего этого треугольника (6 симметрий которого легко позволяют восстановить недостающие части).



Из всех приведённых выше таблиц значений  $N(a, b, c)$  видно, что отношение

$$\theta = \frac{N(a, b, c)}{(2abc)^{1/2}}$$

может сильно меняться даже при небольших изменениях аргументов  $a, b, c$ .

**Пример.** При  $a + b + c = 41$  имеем

$$N(7, 14, 20) = 114, \text{ что гораздо больше, чем } \sqrt{2 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 20} \approx 62,4;$$

$$N(7, 15, 19) = 47, \text{ что гораздо меньше, чем } \sqrt{2 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 19} \approx 63,2.$$

В первом случае  $\theta \approx 1,82$ , а во втором  $\theta \approx 0,74$ , что вдвое меньше, хотя тройки — соседи.

Я давно уже высказал гипотезу, что эмпирически естественная «асимптотика»

$$N \sim \left( (n-1)! \prod_{s=1}^n a_s \right)^{1/(n-1)}$$

должна считаться слабой, т. е. что приближение к ней возникает (по мере роста величины  $\sigma(a)$ ) лишь для средних значений  $N$  по векторам  $a$ , направления которых  $\alpha$  пробегают некоторую область в пространстве направлений (Слабые асимптотики чисел решения диофантовых задач // Функциональный анализ и его прил. 1999. Т. 33, вып. 4. С. 65–66).

Эта гипотеза остаётся недоказанной, но я решил проверить хотя бы поведение средних значений функций  $N$  и  $I = \sqrt{abc}$  по всему симплексу  $\{a + b + c = \sigma, a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1\}$ .

Эти вычисления для приведённых выше таблиц с  $\sigma = 7, 19$  и  $41$  привели к следующим средним значениям  $\hat{N}$  и  $\hat{I}$ .

$\sigma$	$\sum N$	$\sum 1$	$\hat{N} = (\sum N)/(\sum 1)$	$\sum I$	$\hat{I} = (\sum I)/(\sum 1)$
7	6	15	0,4	43,04	2,87
19	1332	153	8,7	1880	12,29
41	33 126	780	42,47	31 068	39,83
97	909 930	4560	199,546		
199	12 975 216	19 503	665,293		

Из этих данных можно логарифмированием извлечь порядок предположительной степенной асимптотики:

$$\hat{N} \sim C\sigma^u.$$

Действительно, если  $\ln \hat{N} = \ln C + u \ln \sigma$ , то коэффициент  $u$  находится как наклон графика зависимости  $\hat{N}(\sigma)$ , нарисованного на двойной логарифмической бумаге:

$$u \approx \frac{\ln \hat{N}(\sigma_2) - \ln \hat{N}(\sigma_1)}{\ln \sigma_2 - \ln \sigma_1}.$$

Для  $\sigma_1 = 7, \sigma_2 = 41$  и для  $\sigma_1 = 19, \sigma_2 = 41$  получаем

$$u \approx \frac{3,83 + 0,92}{3,70 - 1,95} \approx 2,5 \quad \text{и} \quad u \approx \frac{3,83 - 2,20}{3,70 - 2,94} \approx 2,1.$$

Выбор  $\sigma_1 = 41, \sigma_2 = 97$  приводит к наклону прямых  $u = 1,8$ , а выбор  $\sigma_1 = 97, \sigma_2 = 199$  — к  $u \approx 1,6$ . Эти приближающиеся к 1,5 числа отчасти

поддерживают мою гипотезу 1999 года, что при больших векторах  $a$  числа Фробениуса  $N(a)$  растут в среднем как  $\sigma$  в степени  $1 + 1/(n-1)$ , т. е. как  $\sigma$  в степени  $3/2$  при  $n = 3$ . Вычисления для  $\sigma = 97$  и  $199$  — компьютерные, их провёл по моей просьбе А. Годер.

Аналогичные вычисления для  $\hat{l}$  приводят скорее к  $u \approx 1,5$ , что дают и доказанные выше асимптотики (а также соображения подобия, применённые к интегралу от функции  $I = \sqrt{abc}$  по симплексу  $a + b + c = \sigma$ ).

## § 6. Доказательство теоремы Сильвестра

Речь идёт о целых точках ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) на прямой  $ax + by = l$  в плоскости  $\mathbb{R}^2$  (где  $a$  и  $b$  — натуральные взаимно простые числа,  $l$  — целое число).

**Теорема 6.** Если  $l = N - 1 = ab - a - b$ , то на указанном отрезке прямой нет целых точек, а если  $l \geq N = (a-1)(b-1)$ , то есть.

**Доказательство.** Рассмотрим сначала все целые точки на прямой  $ax + by = 0$ . Поскольку  $x$  и  $y$  взаимно просты, число  $x$  делится на  $b$ , а число  $y$  на  $a$ . Поэтому ближайшая к 0 ненулевая целая точка  $P$  нашей прямой имеет координаты  $x = b, y = -a$  (рис. 10).

Следовательно, расстояние между соседними целыми точками на нашей прямой есть  $L = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

На всякой параллельной ей прямой  $ax + by = l$  (с целым  $l$ ) целые точки образуют такую же решётку с шагом  $L$  (рис. 10), так как эти прямые переводятся друг в друга сохраняющим решётку целых точек сдвигом плоскости (поскольку уравнение  $ax + by = 1$  разрешимо, что

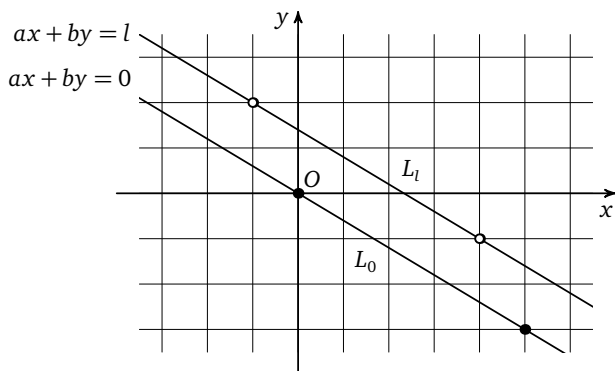
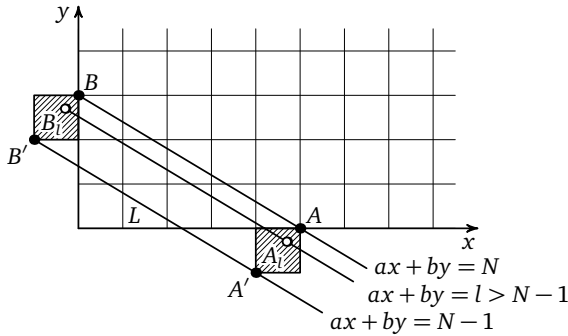


Рис. 10. Целые точки на прямых  $ax + by = l$  ( $a = 3, b = 5$ )



**Рис. 11.** Прямые Сильвестра  
 $ax + by = N(ab) - 1$  и  $ax + by = l > N(ab) - 1$

видно, например, из алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя 1 чисел  $a$  и  $b$ ).

Из всего этого следует, что при  $l \geq ab$  на отрезке прямой  $ax + by = l$ , где  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , целые точки есть (так как длина этого отрезка есть

$$\sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{l}{b}\right)^2} = \frac{l}{ab} \sqrt{a^2 + b^2} \geq L).$$

Тем самым второе утверждение теоремы доказано для  $l \geq ab$ .

Рассмотрим теперь прямую, на которой  $ax + by = ab$  (рис. 11).

На ней лежат точки  $A(x = b, y = 0)$  и  $B(x = 0, y = a)$ .

Точки  $A'(x = b - 1, y = -1)$  и  $B'(x = -1, y = a - 1)$  лежат на прямой  $ax + by = l$ , где  $l = ab - a - b = N - 1$ .

Расстояния  $|AB|$  и  $|A'B'|$  равны  $L$ , поэтому на отрезке  $A'B'$  прямой  $ax + by = l'$  нет целых точек, кроме концевых точек  $A'$  и  $B'$ .

Тем самым первое утверждение теоремы (о пустоте отрезка прямой с  $l = N - 1$ ) доказано.

Для полного доказательства второго утверждения теоремы остаётся проверить его лишь при  $N \leq l < ab$ . В этих условиях прямая  $ax + by = l$  пересекает диагонали  $(AA')$  и  $(BB')$  заштрихованных у точек  $A$  и  $B$  квадратов в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно, причём в  $A_1$  отрицательная координата  $y$ , а в  $B_1$  отрицательная координата  $x$ .

Расстояние  $|A_1B_1|$  равно  $L$ , подобно расстоянию  $|AB|$ . Поэтому на отрезке  $A_1B_1$  обязательно есть целая точка  $(x_1, y_1)$ . В этой целой точке обе координаты неотрицательны, так как пересечения отрезка  $A_1B_1$  прямой  $ax + by = l$  с областями  $x < 0$  и  $y < 0$  лежат внутри заштрихованных квадратов (рис. 11), где целых точек нет. Наличие целой точки  $(x_1, y_1)$ , где  $x_1 \geq 0$ ,  $y_1 \geq 0$ ,  $ax_1 + by_1 = l \geq N$ , доказывает теорему Сильвестра до конца.  $\square$

## § 7. Геометрия цепных дробей чисел Фробениуса

Приведённые ниже геометрические теоремы о числах Фробениуса я придумал в 1999 году, когда писал работу о слабых асимптотиках чисел решений диофантовых задач и вычислял тысячи чисел Фробениуса  $N(a, b, c)$ . Но я не опубликовал этих результатов, считая их тогда слишком очевидными. Эта их очевидность ниже и доказывается. В отличие от доказательств, открытие этих геометрических фактов вовсе не просто.

Пусть  $(a, b, c)$  — положительные целые числа, не имеющие большего 1 общего делителя. Рассмотрим функцию со значениями  $l(y, z) = by + cz$  на замкнутом положительном квадранте  $\{(y \geq 0, z \geq 0)\}$ .

**Определение 1.** *Реализатором остатка  $k$  от деления на  $a$  называется такая целая точка  $r$  квадранта, что значение  $l(r)$  даёт при делении на  $a$  остаток  $k$ , причём значение  $l(r)$  — минимальное (среди всех дающих в остатке  $k$  при делении на  $a$  значений в точках замкнутого положительного квадранта  $\{(y \geq 0, z \geq 0)\}$ ).*

**Определение 2.** *Областью  $D(a, b, c)$  тройки  $(a, b, c)$  называется множество всех реализаторов всех  $a$  остатков ( $k = 0, 1, \dots, a - 1$ ).*

Рисовать удобнее не конечное множество реализаторов, а соответствующую вещественную область, где они лежат (см. теорему 7).

Все остатки реализуются, если  $(a, b, c) = 1$ , — это следует из алгоритма Евклида. Как правило, у каждого остатка только один реализатор, в этом случае число всех реализаторов равно  $a$ . Но если реализаторов больше, то это нам не мешает.

**Теорема 7.** *Ограничивающая область  $D$  ломаная является всегда ступенчатой лестницей (диаграммой Юнга): если точка  $q$  лежит вне области  $D$ , то любая точка  $Q \geq q$  (с координатами  $\{(y(Q) \geq y(q), z(Q) \geq z(q))\}$ ) тоже лежит вне области  $D$ .*

**Пример.** Для  $a = 21$ ,  $b = 31$ ,  $c = 45$ , выписывая у каждой целой точки  $q = (y, z)$  остаток от деления числа  $l(q)$  на  $a$ , мы получаем набор остатков, доставляющий выделенные жирным шрифтом реализаторы, образующие обведённую лестничной ломаной область  $D$ . Вне этой области те же остатки достигаются (в целых точках положительного квадранта  $\{(y \geq 0, z \geq 0)\}$ ) при больших значениях функции.

Рассмотрим вершину  $M$  ограничивающей область  $D$  лестничной ломаной, где значение  $L$  линейной функции  $l$  максимально (таких «максимальных вершин» может быть несколько).

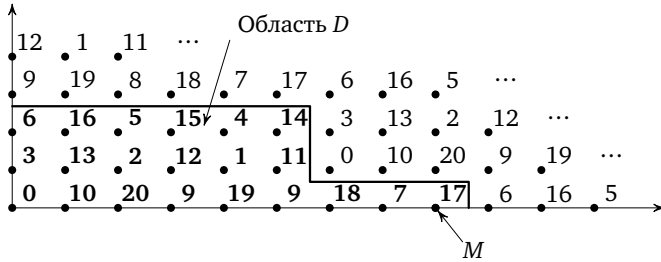


Рис. 12. Лестничная ломаная тройки (21, 31, 45)

**Теорема 8.** Число Фробениуса  $N(a, b, c)$  даётся формулой

$$N = L - a + 1.$$

**Пример.** В предыдущем примере (единственная) максимальная вершина  $M$  имеет координаты  $y = 8, z = 0$ , так что

$$L = l(8, 0) = 8 \cdot 31 + 0 \cdot 45 = 248 \quad (\equiv 17 \pmod{21}).$$

Теорема 8 утверждает в этом случае, что

$$N(21, 31, 45) = 248 - 21 + 1 = 228,$$

что верно, но не так уж легко доказывается.

**Доказательство теоремы 7.** Если точка  $q$  лежит вне области  $D$ , то в  $D$  есть реализатор  $r$  со сравнимым с  $l(q)$  по модулю  $a$  значением  $l(r) < l(q)$ . Пусть  $Q \geq q$ . Докажем, что точка  $Q$  тоже лежит вне области  $D$ .

Рассмотрим вектор  $R = r + (Q - q)$ . Имеем  $l(R) = l(Q) \pmod{a}$ ,  $l(R) < l(Q)$ , поэтому точка  $Q$  не реализатор и лежит вне области  $D$ .  $\square$

**Доказательство теоремы 8.**

**Лемма 1.** Число  $L - a$  не входит в аддитивную полугруппу

$$P = \{ax + by + cz, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

комбинаций с целыми коэффициентами  $(x, y, z)$ .

**Доказательство леммы 1.** Если бы имелось представление

$$L - a = aX + bY + cZ, \quad X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, \quad (1)$$

то точка  $Q$  с координатами  $(Y, Z)$  удовлетворяла бы условиям

$$l(Q) = bY + cZ \leq (aX + bY + cZ = L - a) < (L = l(M)).$$

Значит, точка  $M$  не была бы реализатором, вопреки своему определению. Полученное противоречие доказывает невозможность представления (1). Лемма 1 доказана.  $\square$



**Лемма 2.** Любое целое число  $K > L - a$  входит в аддитивную полу-группу  $P$ .

**Доказательство леммы 2.** Реализатор  $r$  остатка от деления целого числа  $K > L - a$  на  $a$  принадлежит области  $D$  тройки  $(a, b, c)$ . Поэтому выполняются неравенства  $l(r) \leq L < K + a$  (ведь число  $L$  — максимум функции  $l$  на реализаторах).

Остатки от деления обоих чисел  $K$  и  $l(r)$  на  $a$  одинаковы. Значит, из неравенства  $l(r) < K + a$  вытекает неравенство  $l(r) \leq K$ . Поэтому  $K = l(r) + xa$ , где целое число  $x$  неотрицательно. Обозначая координаты точки  $r$  через  $(y, z)$ , мы получаем равенство  $K = ax + by + cz$ , доказывающее лемму 2.  $\square$

Теорема 8 вытекает из лемм 1 и 2: число Фробениуса  $N$  больше  $L - a$  по лемме 1 и не превосходит  $L - a + 1$  по лемме 2, а потому равно  $L - a + 1$ .  $\square$

**Пример.** В случае  $a = b$  мы находим в качестве максимального реализатора точку  $M$  с координатами  $(y = 0, z = a - 1)$ , поэтому  $L = c(a - 1)$  и теорема 8 доставляет ответ:

$$N(a, a, c) = c(a - 1) - a + 1 = (a - 1)(c - 1),$$

так что мы по-новому доказали теорему Сильвестра:

$$N(a, c) = (a - 1)(c - 1).$$

Для быстрого вычисления области  $D$  (а значит, по теореме 8, и числа Фробениуса) полезно следующее описание лестничной границы области  $D$ .

**Теорема 9.** Если точка  $Q$  лежит вне области  $D$  на 1 выше горизонтального участка границы (где  $z = \text{const}$ ), то число  $l(Q)$  сравнимо по модулю  $a$  со значением  $l(R)$  в одной из точек  $R$  нижней границы области  $D$  (где  $z = 0$ ).

Более того, любой реализатор  $R$  остатка от деления числа  $l(Q)$  на  $a$  лежит на нижнем краю области  $D$ .

**Доказательство теоремы 9.** Если бы в реализаторе  $R$  выполнялось неравенство  $z(R) > 0$ , то области  $D$  принадлежала бы также точка  $r = (y(R), z(R) - 1)$ . В этом случае точка  $q = (y(Q), z(Q) - 1)$  давала бы при делении значения  $l(q)$  на  $a$  такой же остаток, как остаток от деления на  $a$  меньшего значения  $l(r)$ .

Поэтому точка  $q$  лежала бы вне области  $D$  (не была бы реализатором по причине существования соперника  $r$ ). Иными словами, если бы  $z(R)$  было положительным, то исходная точка  $Q$  не могла бы

лежать сразу над горизонтальным участком границы области  $D$ , вопреки условию. Значит,  $z(R) = 0$ , и теорема 9 доказана.  $\square$

*Замечание.* Меняя местами  $y$  и  $z$ , мы получаем аналогичное теореме 9 описание вертикальных участков ( $y = \text{const}$ ) границы области  $D$ :  $l(Q) = l(R = (0, z(R))) \pmod{a}$  на следующей вертикали за граничной.

**Следствие.** За любой входящей вершиной граничной лестничной ломаной (направленной здесь остриём к началу координат) значение функции  $l$  в отстоящей на 1 и от горизонтального, и от вертикального отрезков ломаной точке  $V$  делится на  $a$ .

**Доказательство следствия.** Реализатор  $r$  остатка от деления числа  $l(V)$  на  $a$  должен принадлежать и оси  $y = 0$ , и оси  $z = 0$  (по теореме 9). Значит,  $r = 0$ ,  $l(r) = 0$ , а потому  $l(V)$  делится на  $a$ .  $\square$

**Пример.** Координаты входящей вершины  $V$  на рис. 13:  $y(V) = 6$ ,  $z(V) = 2$ . В ней указан остаток нуль, так как значение  $l(V) = 186 + 45 = 231 = 21 \cdot 11$  делится на  $a = 21$ .

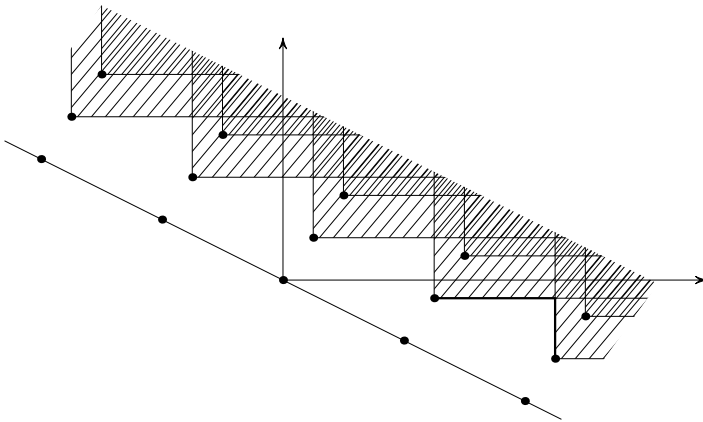


Рис. 13. Построение пилы  $\Pi$  с зубцами  $K_q$

Из теорем 7–9 следует быстрый способ построения области  $D$  (а стало быть, и вычисления числа Фробениуса).

А именно, рассмотрим решётку  $\Gamma$  тех целых точек  $q$  плоскости с координатами  $(y, z)$ , в которых значение  $l(q)$  делится на  $a$ . Например, в их число входят точки  $(c, -b)$  и  $(a, 0)$  (не обязательно образующие базис решётки  $\Gamma$ ).

Рассмотрим ту часть  $\Gamma_+$  решётки  $\Gamma$  («полурешетку»), где функция  $l = by + cz$  принимает положительные значения. Каждой точке  $q$  из

полурешетки  $\Gamma_+$  сопоставим замкнутый «зубец»

$$K_q = \{Q \geq q : y(Q) \geq y(q), z(Q) \geq z(q)\}$$

с вершиной  $q$ . Рассмотрим (рис. 13) пилу из всех таких зубцов

$$\Pi = \bigcup_{l(q) > 0} K_q.$$

**Теорема 10.** Область  $D$  представляет собой дополнение к пиле  $\Pi$  в положительном квадранте  $\mathbb{R}_+^2 = \{y \geq 0, z \geq 0\}$  (плоскости с координатами  $y$  и  $z$ ):  $D = \mathbb{R}_+^2 \setminus \Pi$ .

**Доказательство теоремы 10.**

**Лемма 1.** Никакой квадрант  $K_q$  не пересекается с областью  $D$ .

**Доказательство леммы 1.** Действительно, пусть точка  $q$  лежит в положительном квадранте плоскости. Тогда (единственным) реализатором остатка от деления числа  $l(q)$  на  $a$  является точка  $0 \in D$ , поэтому  $q \neq 0$  не принадлежит области  $D$ .

Если  $y(q) > 0, z(q) < 0$ , то мы рассмотрим разложение

$$q = q' - q'', \quad q' = (y(q), 0), \quad q'' = (0, -z(q)).$$

В этих обозначениях

$$l(q') = l(q) + l(q'') > l(q''),$$

поэтому точка  $q'$  не принадлежит области  $D$  (ибо в точке  $q''$  остаток от деления  $l$  на  $a$  такой же, а значение меньше).

По теореме 7 весь квадрант больших чем  $q'$  точек не пересекается с областью  $D$ , поэтому и весь квадрант  $K_q$  больших чем  $q$  точек с областью  $D$  не пересекается (ведь в  $D$  всюду  $z \geq 0$ ).

Итак,  $D \cap K_q = \emptyset$  и в рассматриваемом случае, так что лемма 1 доказана.  $\square$

**Лемма 2.** Если точка  $Q \in \mathbb{R}_+^2$  не принадлежит ни одному из квадрантов  $K_q$  (где  $l(q) > 0$ ), то точка  $Q$  принадлежит области  $D$ .

**Доказательство леммы 2.** Рассмотрим (рис. 14) реализатор  $R \in D$  остатка от деления числа  $l(Q)$  на  $a$ . Если  $l(R) < l(Q)$ , то в точке  $q = Q - R$  выполнены такие условия (рис. 14): разность  $l(q) = l(Q) - l(R) > 0$  делится на  $a$ ,  $Q \geq q$  (т. е.  $y(Q) \geq y(q), z(Q) \geq z(q)$ ).

Значит,  $Q \in K_q$  для точки  $q$  полурешетки, где  $l(q) > 0$  (точка  $q$  не обязана лежать в  $D$ ).

Следовательно, если точка  $Q$  не лежит ни в одном из квадрантов  $K_q$  точек полурешетки, то  $l(R) = l(Q)$ , т. е. точка  $Q$  сама является реализатором и принадлежит области  $D$ . Лемма 2 доказана.  $\square$

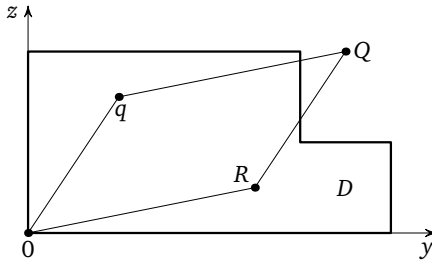


Рис. 14. К доказательству леммы 2

Теорема 10 является прямым объединением утверждений лемм 1 и 2, так что она теперь доказана.  $\square$

Доказанные выше результаты о структуре области реализаторов  $D(a, b, c)$  можно переформулировать в терминах теории цепных дробей следующим образом.

Рассмотрим для тройки целых чисел  $(a, b, c)$  плоскость

$$\Pi = \{(x, y, z) : ax + by + cz = 0\} \quad \text{в } \mathbb{R}^3.$$

Три прямые ( $X$ , где  $x = 0$ ;  $Y$ , где  $y = 0$ ;  $Z$ , где  $z = 0$ ) делят плоскость  $\Pi$  на шесть «камер Вейля».

Целые точки плоскости  $\Pi$  образуют двумерную решётку  $\Gamma$ . Например, она всегда содержит «точки Кошуля»

$$\begin{aligned} &\pm (x = 0, y = c, z = -b), \\ &\pm (x = -c, y = 0, z = a), \\ &\pm (x = b, y = -a, z = 0), \end{aligned}$$

но базисные векторы решётки  $\Gamma$  могут быть и иными.

Отличные от  $O$  точки решётки  $\Gamma$  в каждой (замкнутой) камере Вейля  $K$  образуют там аддитивную полугруппу. Выпуклая оболочка этой полугруппы ограничена ломаной (обращённой выпуклостью к нулю), которая называется *цепной дробью* (тройки  $(a, b, c)$  в камере  $K$ ).

Все эти 6 цепных дробей образуют звездчатый шестиугольник на плоскости  $\Pi$  с вершинами в точках решётки  $\Gamma$ , внутри которого лежит только одна точка  $O$  решётки  $\Gamma$  (рис. 15).

Теперь мы опишем область реализаторов  $D(a, b, c)$  в терминах геометрии этих цепных дробей (так что и число Фробениуса  $N$  тройки  $(a, b, c)$  получит описание в терминах цепных дробей).

*Замечание.* Можно надеяться, что эти геометрические конструкции позволят в дальнейшем обобщить числа Фробениуса на случай

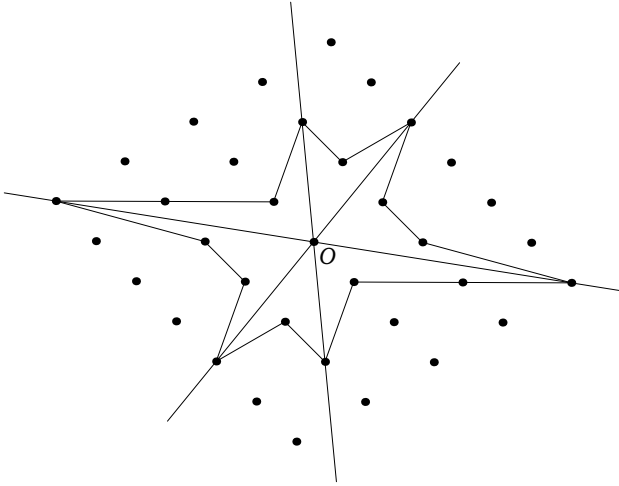


Рис. 15. Шестиугольник цепных дробей решётки с тремя прямыми

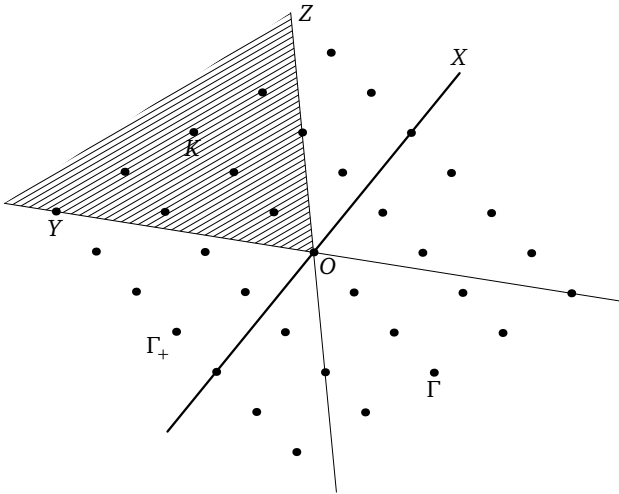


Рис. 16. Исходные данные для построения области D: угол K, решётка  $\Gamma$  и три прямые (X, Y и Z)

несоизмеримых аргументов  $(a, b, c)$  (подобно тому как обычная теория цепных дробей позволяет обобщить алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего кратного двух целых чисел, переходя от конечных выпуклых ломаных к бесконечным).

Итак, начнём с трёх прямых, проходящих через точку  $O$  плоскости  $\mathbb{R}^3$  с какой-либо решёткой  $\Gamma$  (с началом  $O$ ). Выберем один из 6 углов, на которые эти прямые делят плоскость.

Обозначим этот угол через  $K$ , составляющие его стороны — через  $(Y, Z)$ , а третью прямую — через  $X$  (рис. 16). Обозначим через  $\Gamma_+$  ту полурешетку решётки  $\Gamma$ , которая состоит из точек решётки  $\Gamma$ , лежащих от прямой  $X$  строго по ту же сторону, что и угол  $K$ . Перенесём угол  $K$  параллельно в каждую точку  $q$  положительной полурешетки  $\Gamma_+$ , так что получится угол  $K_q$  с вершиной  $q \in \Gamma_+$ .

**Определение.** Областью  $D$  угла  $K$  (для решётки  $\Gamma$  и тройки прямых  $X, Y, Z$ ) называется дополнение в угле  $K$  к объединению всех перенесённых углов  $K_q$  с вершинами  $q \in \Gamma_+$ :

$$D = K \setminus \bigcup K_q, \quad q \in \Gamma_+.$$

Пусть три положительных целых числа  $a, b, c$  не имеют большего чем 1 общего делителя.

**Теорема 11.** При проектировании трёхмерного пространства с координатами  $(x, y, z)$  на плоскость с координатами  $(y, z)$  (вдоль оси  $x$ ) область  $D$  угла  $K$  (где  $y \geq 0, z \geq 0$ ) плоскости

$$\Pi = \{(x, y, z) : ax + by + cz = 0\}$$

с решёткой  $\Gamma$  её целых точек и тройкой прямых

$$(X : x = 0, Y : y = 0, Z : z = 0)$$

проектируется на область  $D(a, b, c)$  реализаторов  $q = (y, z)$  остатков от деления на  $a$  значений линейной функции  $l(y, z) = by + cz$ .

*Замечание.* Из этой теоремы следует, в частности, совпадение чисел Фробениуса всех шести цепных дробей камер Вейля на плоскости  $\Pi$ , которое само по себе геометрически вовсе не очевидно: ведь  $N(a, b, c) = N(b, c, a) = \dots$

**Доказательство теоремы 11.** Запишем уравнение  $ax + by + cz = 0$  плоскости  $\Pi$  в виде

$$z = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z,$$

т. е. в виде  $z = -l(y, z)/a$ .

Из этой формулы следует, что точки решётки  $\Gamma$  (целых точек плоскости  $\Pi$ ) проектируются в точности в те целые точки  $q$  плоскости с координатами  $(y, z)$ , для которых значение  $l(q)$  делится на  $a$ .

Описание лестничной границы области  $D(a, b, c)$  на плоскости с координатами  $(y, z)$ , данное в теоремах 7–10, доставляет в терминах проекции (из трёхмерного пространства на плоскость с координатами  $(y, z)$  вдоль оси  $x$ ) в точности приведённое выше геометрическое описание области  $D$  для угла  $K$  (где  $y \geq 0, z \geq 0$ ) на плоскости  $\Pi$  (снабжённой решёткой целых точек  $\Gamma$  и тройкой прямых  $(X, Y, Z)$ ), что и доказывает теорему 11.  $\square$

*Замечание.* Кроме доказанных выше теорем мои давние вычисления тысяч чисел Фробениуса привели и к сотням других наблюдений, не получивших пока научных объяснений и общих формулировок. Вот некоторые из этих странных экспериментальных наблюдений:

$$\frac{N(13, 32, 52) = 372}{N(13, 33, 51) = 186} = 2$$

$$\frac{N(9, 43, 45) = 336}{N(9, 42, 46) = 168} = 2,$$

$$\frac{N(5, 35, 57) = 224}{N(5, 34, 58) = 112} = 2,$$

$$\frac{N(4, 20, 73) = 216}{N(4, 19, 74) = 54} = 4,$$

$$N(4, 6 + 4k, 87 - 4k) = 90 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 14, k \neq 8),$$

$$N(9, 9k \pm 3, 88 - (9k \pm 3)) = 168 \quad (k = 1, 2, \dots, 7).$$

Интересно было бы понять, как связаны между собой аддитивные полугруппы и цепные дроби разных членов этих серий троек чисел для троек, имеющих связанные между собой приведёнными выше формулами числа Фробениуса.

Перенесение описанной выше теории на случай чисел Фробениуса  $N(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , где  $n > 3$ , мало что меняет в ней, только цепные дроби становятся многомерными.

Продолжение исследований асимптотического поведения чисел Фробениуса больших векторов трёхмерного пространства, содержащихся в лекции 2005 года в Дубне, описано в статье: *Arnold V. I. Geometry and growth rate of Frobenius numbers of additive semigroups // Math. Phys. Anal. Geom.* 2006. V. 9, № 2. P. 95–108.

Эти результаты, подтверждающие автомодельность усреднённого распределения чисел Фробениуса по  $n$ -мерному пространству векторов, показывают, что рост чисел Фробениуса порядка  $\sigma$  в степени  $1 + 1/(n - 1)$  встречается чаще, чем рост порядка  $\sigma^2$  (встречающийся в резонансных местах).

В частности, средние значения чисел Фробениуса  $N(a, b, c)$  по треугольникам  $a + b + c = \sigma$  растут, по-видимому, как  $\sigma^{3/2}$  при больших значениях  $\sigma$ .

Подробности этих исследований опубликованы в большой статье *Arnold V. I. Arithmetical Turbulence of Selfsimilar Fluctuations Statistics of Large Frobenius Numbers of Additive Semigroups of Integers // Moscow Mathematical Journal. 2007. V. 7, № 2. P. 173–193.*

## § 8. Распределение точек аддитивной полугруппы на отрезке до числа Фробениуса

Сильвестр доказал, что точки аддитивной полугруппы с двумя взаимно простыми образующими ( $P = \{xa + yb\}$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ) заполняют ровно половину<sup>1</sup> целочисленного отрезка  $\{0, N - 1\}$  до числа Фробениуса  $N(a, b)$  ( $a$  именно, их число равно  $N/2$ , причём точка  $p$  лежит в полугруппе  $P$ , если и только если сопряжённая точка  $q = N - 1 - p$  не принадлежит полугруппе  $P$ ).

Если число образующих больше 2, то полугруппа  $P$  занимает не более половины отрезка  $\{0, N - 1\}$ . Действительно, если точка  $p$  лежит в  $P$ , то сопряжённая точка  $q = N - 1 - p$  лежать в  $P$  не может (иначе сумма  $p + q = N - 1$  входила бы в полугруппу  $P$ , что противоречит минимальности из определения числа Фробениуса  $N$ ).

В некоторых случаях полугруппа с тремя образующими занимает ровно половину целочисленного отрезка  $\{0, N - 1\}$ .

**Пример.** Имеем  $N(3, 4, 7) = N(3, 4) = 6$ , так как третья образующая 7 не добавляет ничего в полугруппу:  $P(3, 4, 7) = P(3, 4)$ . Из 6 точек  $\{0, \dots, 5\}$  в эту полугруппу входят три:  $\{0, 3, 4\}$ .

В других случаях занятая полугруппой часть целочисленного отрезка до числа Фробениуса меньше его половины.

**Пример.** Имеем  $N(4, 5, 7) = 7$ , а из 7 точек целочисленного отрезка  $\{0, 1, \dots, 6\}$  в полугруппу  $P\{4, 5, 7\}$  входят только три точки  $\{0, 4, 5\}$ , и  $3/7 < 1/2$ .

По-видимому, полугруппа  $P(a, b, c)$  всегда покрывает не менее трети точек целочисленного отрезка  $\{0, 1, \dots, N(a, b, c) - 1\}$  (может быть, нижняя грань занимаемой ею доли даже больше  $1/3$ ). Но это не доказано.

<sup>1</sup> Число  $N$  точек этого целочисленного отрезка чётно, так как  $N = (a - 1)(b - 1)$  было бы нечётным, только если обе образующие были бы чётными, что невозможно из-за взаимной простоты.



Попытки понять, почему полугруппа не может занимать слишком малую часть отрезка  $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ , привели к удивительным экспериментальным наблюдениям. Я расскажу здесь о них потому, что надеюсь на участие учеников Дубнинской школы в доказательстве (или опровержении) удивительных гипотез, сформулированных ниже.

Пусть  $p \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ , где  $N = N(a, b, c)$  — число Фробениуса трёх образующих  $(a, b, c)$  аддитивной полугруппы

$$P = \{xa + yb + zc : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} \quad (x, y, z \in \mathbb{Z}_+),$$

не имеющих большего чем 1 общего делителя.

**Определение 1.** Число  $p$  называется  $(+)$ -числом, если оно входит в полугруппу  $P$ .

**Пример.** Число 0 является  $(+)$ -числом, а  $N - 1$  нет.

**Определение 2.** Число  $p$  называется  $(-)$ -числом, если оно не входит в полугруппу  $P$ .

**Пример.** Число  $N - 1$  является  $(-)$ -числом, а число  $a$  — нет.

**Определение 3.** Число  $q$  называется сопряжённым к числу  $p$ , если  $p + q = N - 1$ . Обозначение:  $q = \bar{p}$ .

Очевидно, сопряжённым числом к сопряжённому к числу  $p$  является само число  $p$ .

Если  $p$  является  $(+)$ -числом, то сопряжённое к нему число  $\bar{p}$  является  $(-)$ -числом, ибо иначе число  $p + \bar{p} = N - 1$  входило бы в полугруппу  $P$ , вопреки определению числа Фробениуса  $N$ .

**Определение 4.** Число  $p$  называется  $(-, -)$ -числом, если и оно, и сопряжённое ему число являются  $(-)$ -числами:  $p \notin P, \bar{p} \notin P$ .

Наша ближайшая цель — исследование множества всех  $(-, -)$ -чисел и числа  $\#\{(-, -)\}$  его элементов.

*Замечание.* Количества  $(+)$ -чисел,  $(-)$ -чисел и  $(-, -)$ -чисел  $\#\{(+)\}$ ,  $\#\{(-)\}$  и  $\#\{(-, -)\}$  соответственно связаны следующими очевидными соотношениями:

$$\#\{(+)\} + \#\{(-)\} = N,$$

$$\#(-) - \#\{(+)\} = \#\{(-, -)\}.$$

Это следует из того, что

$$\#\{(+)\} = \#\{(+, -)\} = \#\{(-, +)\},$$

$$\#\{(-)\} = \#\{(-, -)\} + \#\{(-, +)\}$$

(где  $\#\{(\alpha, \beta)\}$  есть число точек  $p$  класса  $\alpha$ , для которых сопряжённая точка  $\bar{p}$  принадлежит классу  $\beta$ ).

В частности,

$$N = 2 \#\{(+)\} + \#\{(-, -)\},$$

поэтому число Фробениуса  $N$  и число точек  $(-, -)$  одинаковой чётности.

В частности, если число Фробениуса  $N(a, b, c)$  нечётно, то

$$\#\{(-, -)\} > 0,$$

т. е. точки типа  $(-, -)$  существуют (чего не бывает для полугрупп с двумя образующими).

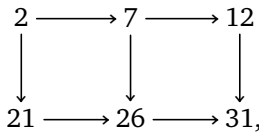
**Пример.** Имеем  $N(5, 17, 19) = 34$ .

Числа типа  $(+)$ :  $\{0, 5, 10, 15, 17, 19, 20, 22, 24, 25, 27, 29, 30, 32\}$ . Их 14.

Числа типа  $(-)$ :  $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 21, 23, 26, 28, 31, 33\}$ . Этих чисел 20.

Числа типа  $(-, -)$ :  $\{2, 7, 12, 21, 26, 31\}$ . Этих чисел 6.

Шесть чисел типа  $(-, -)$  образуют замечательную диаграмму



где « $\rightarrow$ » означает «прибавить  $a = 5$ », « $\downarrow$ » означает «прибавить  $c = 19$ ».

Обозначим через  $t$  наименьшее из чисел типа  $(-, -)$ , а через  $M$  — наибольшее из чисел типа  $(-, -)$ .

**Гипотеза 1.** Разность  $M - t$  всегда число типа  $(+)$ .

**Пример.** В предыдущем примере

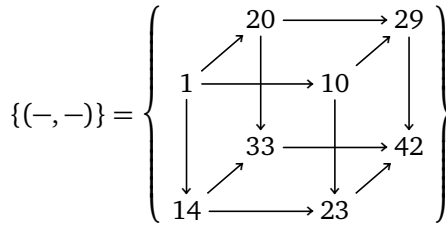
$$M = 31, \quad t = 2, \quad M - t = 29 = 2a + c$$

(потому что приведённая выше прямоугольная диаграмма имеет длину 2 направления  $a$  и высоту 1 направления  $c$ ).

Основание гипотезы состоит в том, что числа типа  $(-, -)$  в многочисленных примерах образуют прямолинейные, прямоугольные или параллелепипедальные диаграммы, подобные приведённому прямоугольнику из 6 точек типа  $(-, -)$ .

**Пример.** Имеем  $N(10, 13, 48) = 56$ ,  $\{(-, -)\} = \{8 \rightarrow 21 \rightarrow 34 \rightarrow 47\}$  — отрезок ( $b = 13$ )-направления из 4 вершин.

**Пример.** Имеем  $N(9, 13, 19) = 44$ ,



— параллелепипед из 8 вершин с рёбрами « $\rightarrow$ »  $a$ -направления, « $\downarrow$ »  $b$ -направления, « $\nearrow$ »  $c$ -направления длины 1.

**Гипотеза 2.** Множество точек типа  $\{(-, -)\}$  всегда представляет собой параллелепипед (размерности 1, 2 или 3), рёбра которого соединяют вершины  $t$  и  $M$  направленными отрезками, изображающими увеличение вершины на  $a$ , на  $b$  или на  $c$ . А именно, если

$$M = t + (ua + vb + wc),$$

то рёбра  $a$ -направления имеют длину  $u$ ,  $b$ -направления — длину  $v$ ,  $c$ -направления — длину  $w$ .

Я сформулировал здесь эти гипотезы не потому, что умею их доказывать, а потому, что надеюсь, что эксперименты учащихся Дубнинской школы (возможно, компьютеризированные) помогут либо опровергнуть их контрпримером, либо пополнить имеющиеся у меня списки подтверждающих примеров более убедительными доводами в пользу этих гипотез.

Надежда использовать описанную выше предполагаемую структуру множеств  $\{(-, -)\}$  для оценки количества  $(+)$ -точек снизу основана на надежде извлечь из этой структуры оценку количества  $(-, -)$ -точек сверху.

Например, чтобы доказать оценку  $\#\{(+)\} \geq \epsilon N$ , достаточно было бы проверить, что  $\#\{(-, -)\} \leq (1 - 2\epsilon)N$ .

В известных мне примерах неравенство  $\#\{(-, -)\} \leq N/3$  всегда выполнено (с запасом), так что выполнено и неравенство  $\#\{(+)\} \geq N/3$  (и даже более сильное неравенство), но в общей ситуации эти оценки не доказаны.

Некоторый аналог этих гипотетических оценок доставляет следующая задача.

**Задача.** Какую часть объёма тетраэдра может покрывать целиком содержащийся в нём параллелепипед?

**Гипотеза 3. Справедливо неравенство**

$$\frac{\text{объём параллелепипеда}}{\text{объём симплекса в } \mathbb{R}^n} \leq \frac{n!}{n^n}.$$

**Пример.** При  $n = 2$  правая часть равна  $1/2$ , и содержащийся в треугольнике параллелограмм может покрыть половину его площади и не может покрыть больше, что легко доказать.

При  $n = 3$  правая часть  $n!/n^n$  равна  $2/9$ . Такую долю объёма пирамиды нетрудно накрыть подходящим лежащим в ней параллелепипедом. Например, для пирамиды  $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$  две девятых её объёма покрывает куб  $\{0 \leq x \leq 1/3, 0 \leq y \leq 1/3, 0 \leq z \leq 1/3\}$ . Доказать, что нельзя покрыть бóльшую  $2/9$  часть объёма, не так просто (но, думаю, не слишком и трудно для дубнинских школьников).

Надежда использовать эту задачу для оценки сверху числа целых точек предполагаемого параллелепипеда  $\{(-, -)\}$  основана на том, что результаты выпуклой геометрии многогранников обычно имеют в геометрии Минковского целочисленные аналоги (где роль объёма многогранника играет число его целых точек).

*Замечание.* Число Фробениуса  $N$  — не число целых точек в пирамиде  $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, ax + by + cz \leq N - 1\}$ , куда предполагается вкладывать параллелепипед  $\{(-, -)\}$ , а своеобразный численный аналог высоты этой пирамиды (опущенной на «гипотенузу» из вершины  $O$ ). Такой же «высотой» является и оцениваемое сверху число точек типа  $(-, -)$ .

Поэтому для доказательства оценки числа точек типа  $(-, -)$  сверху через число Фробениуса  $N(a, b, c)$  гипотеза 3 недостаточна (хотя она, вероятно, практически необходима для изобретения этого доказательства).

Всё же объём пирамиды оценён сверху величиной порядка  $N$  (при доказательстве в § 3 оценки числа Фробениуса снизу  $N \geq \text{const} \cdot \sigma^{3/2}$ ). Высота  $\#\{(-, -)\}$  предполагаемого параллелепипеда не превосходит числа его целых точек, которое напоминает его объём, оцениваемый гипотезой 3. Поэтому гипотеза 3 позволяет надеяться на оценку числа точек типа  $(-, -)$  сверху величиной определённой доли числа Фробениуса,  $\#\{(-, -)\} \leq (1 - 2\varepsilon)N$ .

Было бы интересно исследовать не только полную массу точек полугруппы на отрезке до числа Фробениуса, но и характер распределения точек полугруппы на этом отрезке.

Эмпирическая плотность этого распределения часто оказывается растущей примерно степенным образом (с предполагаемым показателем 2, превращающимся в  $n - 1$  для полугрупп с  $n$  образующими).

Показатель  $n - 1$  объясняется соотношением  $dl^n = nl^{n-1}dl$  (рис. 4 на с. 151). Но резонансы (вроде соотношения  $P(a, b, c) = P(a, b)$  при  $c = a + b$ ) нарушают связь между числом точек проекции целых точек  $n$ -мерной пирамиды и  $l^n$ , поэтому превратить указанное наблюдение роста плотности в теорему не так уж легко.

Я сформулировал выше программу оценки числа точек типа (+) снизу для случая трёх образующих полугруппы. Но аналогичная программа пригодна и для  $n > 3$  образующих (с предположенной ещё в моей цитированной выше работе 1999 года гипотетической оценкой  $\# \{ (+) \} \geq N/n$  и с гипотезой о росте плотности).

## Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; [biblio.mccme.ru](http://biblio.mccme.ru)

Книга — почтой: <http://biblio.mccme.ru/shop/order>

Книги в электронном виде: <http://www.litres.ru/mcnmo/>

### Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; [www.umlit.ru](http://www.umlit.ru), [www.textbook.ru](http://www.textbook.ru), [abris.pf](mailto:abris.pf)
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; [www.kniga.ru](http://www.kniga.ru)

### Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; [www.mdk-arbat.ru](http://www.mdk-arbat.ru)
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; [www.bookmg.ru](http://www.bookmg.ru)
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; [www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; [www.arg.ru](http://www.arg.ru)
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; [www.uchebnik.com](http://www.uchebnik.com)
- Сеть магазинов «Шаг к пятёрке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; [www.shkolkniga.ru](http://www.shkolkniga.ru)
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, [www.urss.ru](http://www.urss.ru)
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

### Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; [k\\_i\\_@bk.ru](mailto:k_i_@bk.ru), [k\\_i\\_@petroglyph.ru](mailto:k_i_@petroglyph.ru)
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

### Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, [www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)

### Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; [df-al-e1@bk.ru](mailto:df-al-e1@bk.ru)